Essais sur l'inégalité et la mobilité

Pauline Mornet

Collège Doctoral du Languedoc-Roussillon

THÈSE

Pour obtenir le grade de Docteur

Délivré par l'**Université de Montpellier**

Préparée au sein de l'école doctorale **EDEG**
Et de l'unité de recherche **LAMETA**

Spécialité: **Sciences Économiques (Section 5)**

Présentée par **Pauline Mornet**

Essais sur l'inégalité et la mobilité

Sous la direction de M. Stéphane Mussard et Mme. Françoise Seyte

Soutenue le 21 mai 2015 devant le jury composé de

M. Frank Cowell	Professeur	London School of Economics
M. Koen Decancq	Maître de Conférences HDR	Université d'Anvers
M. Stéphane Mussard	Maître de Conférences HDR	Université de Montpellier
Mme. Françoise Seyte	Maître de Conférences HDR	Université de Montpellier
M. Jacques Silber	Professeur	Université Bar-Ilan
M. Claudio Zoli	Professeur	Université de Vérone

Université de Montpellier

Faculté des Sciences Économiques – LAMETA

Essais sur l'inégalité et la mobilité

Thèse présentée pour l'obtention du grade de :

Docteur de l'Université de Montpellier

École Doctorale d'Économie et Gestion de Montpellier (EDEG)

Groupe des disciplines Sciences Économiques du CNU

Section n°5

par

Pauline Mornet

Soutenue publiquement le 21 Mai 2015

Jury :

M. **Frank Cowell** (Professeur, London School of Economics), Rapporteur

M. **Koen Decancq** (Maître de Conférences HDR, Université d'Anvers), Examinateur

M. **Stéphane Mussard** (Maître de Conférences HDR, Université Montpellier), Directeur

Mme. **Françoise Seyte** (Maître de Conférences HDR, Université Montpellier), Directrice

M. **Jacques Silber** (Professeur, Université Bar-Ilan), Rapporteur

M. **Claudio Zoli** (Professeur, Université de Vérone), Examinateur

"La faculté n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse ; ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur".

Remerciements

Deux ordinateurs, une dizaine de pots de Nutella, une vingtaine de stylos rouges, une bonne centaine de *post-it* et un libre accès à l'ensemble des revues et documents scientifiques, voilà pour le minimum nécessaire à l'aboutissement de cette thèse ; et cela ne concerne que les aspects matériels. Pour ce qui est des aspects intellectuels, cette thèse n'aurait pu aboutir ni même voir le jour sans le concours de nombreuses personnes que je tiens tout particulièrement à remercier.

En premier lieu, je remercie mes directeurs de thèse, Françoise Seyte et Stéphane Mussard d'avoir accepté de m'encadrer et de m'avoir orientée et conseillée tout au long de mon travail de thèse. Car si la décomposition en sous-groupes peut se révéler être un outil d'analyse intéressant, il est important de ne pas se laisser décomposer par un tel sujet ! J'ai beaucoup appris des échanges scientifiques que j'ai pu avoir avec mes directeurs tant sur le plan rédactionnel que sur le plan de la recherche en elle-même. Je tiens plus particulièrement à remercier Stéphane Mussard de m'avoir fait découvrir la magie des caractérisations axiomatiques et des formes fonctionnelles résolues par Aczèl (1966) ou Azcèl et Dhombres (1989), ainsi que pour toute la précieuse attention portée à tous mes calculs et écrits, sans parler de son soutien et de ses encouragements qui m'ont aidée à avancer au fil des années.

Je remercie également BRICE MAGDALOU de m'avoir ouvert la porte de son bureau et de m'avoir appris à « repenser les inégalités » comme le dit si bien Amartya Sen. Chacune des discussions que j'ai pu avoir avec BRICE MAGDALOU m'ont beaucoup apporté. Son soutien et ses conseils bien avisés m'ont aidée à prendre des décisions, car ceux qui me connaissent savent bien qu'en matière de prise de décision ce n'est pas là où j'excelle. C'est notamment BRICE MAGDALOU qui m'a convaincue de m'inscrire pour la "Winter School" qui se tient chaque début d'année dans les Dolomites Italiennes. C'est à l'occasion de la huitième édition de cette école de chercheurs (IT8) que j'ai eu le privilège de rencontrer CLAUDIO ZOLI à qui je dois énormément. Je le remercie notamment pour toutes ces heures passées à travailler avec moi sur les démonstrations des principes de transferts intra- ou intergroupes. Je lui suis très reconnaissante de m'avoir montré qu'un problème qui pouvait sembler très complexe de prime abord pouvait finalement se résumer en quelques lignes de calculs assez simples. La participation à cette école d'hiver a vraiment représenté un moment clé pour ma thèse. J'y ai rencontré de nombreux chercheurs de renommée internationale avec qui j'ai pu échanger plusieurs idées. Parmi ces chercheurs figure KOEN DECANCQ que je tiens également à remercier pour sa sympathie, ses suggestions ainsi que pour ses commentaires sur certains de mes travaux qui m'ont permis d'avancer. Tous deux ont accepté de faire partie de mon jury de thèse et je les en remercie, au même titre que messieurs FRANK COWELL et JACQUES SILBER, également membres de mon jury.

Au cours de mon travail de thèse j'ai aussi pu travailler avec CASILDA LASSO DE LA VEGA que je remercie pour le temps passé à mes côtés à décortiquer les papiers de Shorrocks (1980, 1984) afin de découvrir les secrets de la décomposition (additive) en sous-groupes. Je remercie également les membres du LAMETA de m'avoir accueillie pendant toute la durée de mon doctorat. J'ai notamment une pensée particulière pour THIERRY BLAYAC, ISABELLE ROMESTAN et THÉSY POTHET qui se sont toujours montrés très sympathiques et disponibles, Emmanuel Sol qui m'a aidée de nombreuses fois avec mes problèmes informatiques, sans oublier Michel Terraza qui m'enseigna l'économétrie de la troisième année de Licence jusqu'en Master 2 et qui m'a toujours encouragée à me surpasser. Pour Michel Terraza c'était comme une évidence, je devais faire une thèse. Je tiens donc à le remercier de m'avoir orientée dans cette voie et je lui suis reconnaissante de s'être toujours tenu informé de l'avancée (ou non) de mes recherches de doctorat : « Alors elle est finie cette thèse ? ».

Enfin je remercie ma famille de m'avoir supportée et encouragée, 8 ans d'études c'est tout de même long (et les demis on les compte ?).

Sommaire

Introduction Générale

« Tant que les hommes [...] ne s'appliquèrent qu'à des ouvrages qu'un seul pouvait faire, et qu'à des arts qui n'avaient pas besoin du concours de plusieurs mains, ils vécurent libres, sains, bons, et heureux autant qu'ils pouvaient l'être par leur nature, et continuèrent à jouir entre eux des douceurs d'un commerce indépendant ; mais dès l'instant qu'un homme eut besoin du secours d'un autre, dès qu'on s'aperçut qu'il était utile à un seul d'avoir des provisions pour deux, l'égalité disparut, la propriété s'introduisit, le travail devint nécessaire [...]. » Jean Jacques Rousseau (1755).

Dès 1755 l'inégalité entre les Hommes est perçue comme un état de fait, résultant principalement des interactions humaines. Souvent assimilée à un sentiment d'infériorité (ou de supériorité), l'inégalité se manifeste dès lors qu'un individu constate que ses dotations ne sont pas similaires à celles des individus de son entourage. Ce sentiment d'inégalité peut ensuite engendrer des sentiments d'injustice, d'envie, de mal-être, qui ont d'importantes répercussions sur le système économique et nuisent à son bon fonctionnement. L'une des principales formes d'inégalité présente dans le système économique actuel des pays de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) concerne la variable « revenu (individuel) ». [1] Les récentes études menées par l'OCDE mettent en avant une forte propagation des inégalités de

1. Le terme de revenu est employé ici au sens large et fait référence à toutes formes de rémunération dont peut bénéficier un individu. Des précisions supplémentaires sont apportées

revenus survenue suite à la crise économique mondiale des années 2000. Les écarts de revenus entre les individus ne cessent de se creuser davantage, si bien qu'à l'heure actuelle les 10% des individus les plus riches des pays membres de l'OCDE gagnent 9,5 fois plus que les 10% des individus les plus pauvres.[2] L'accumulation de ces écarts de revenus entraîne, ensuite, une inhibition de la croissance qui de fait, engendre un ralentissement de l'activité économique. Les dirigeants politiques des différents pays concernés doivent donc mettre tout en œuvre pour favoriser une diminution de ces disparités.

La lutte contre les inégalités de revenus est un enjeu majeur qui nécessite de disposer d'indicateurs fiables et précis sur lesquels les décisions politiques peuvent se baser. Parmi les nombreux moyens d'action à leur disposition les gouvernements tendent à recourir essentiellement à la redistribution. Les mesures redistributives restent néanmoins à manipuler avec précaution, car si la redistribution agit sur les inégalités de revenus, elle n'a pas nécessairement de retombées positives sur la croissance économique. Les hautes instances des décisions économiques préconisent alors la mise en place de politiques ciblées sur des parts de population, comme par exemple les 10% les plus pauvres ou les 40% les plus riches. L'OCDE met cependant en garde les dirigeants politiques et leur recommande de ne pas délaisser les classes moyennes des populations, qui restent vulnérables. La mise en place de réformes visant à augmenter l'accès aux services publics est également souhaitable afin « d'assurer la pérennité des opportunités d'égalité ».[3]

Des outils de mesures adaptés doivent être mobilisés et employés par les analystes afin de déterminer quels sont les individus les moins bien lotis au sein de la population étudiée. Ce n'est qu'une fois ces individus identifiés que la

au cours de nos différents chapitres.

2. Source : OECD (2014).
3. Source : OECD (2014).

recherche des facteurs à l'origine des inégalités peut être envisagée. Une caractéristique socio-économique commune à tous les individus est généralement observée (par ex. le genre, le niveau de qualification professionnel, ou le statut économique, *etc.*) et permet alors d'orienter les décisions politiques. Pour arriver à de telles conclusions, une étude minutieuse de la population doit être menée en amont. Des critères de partitionnement pertinents doivent être retenus. Des indicateurs statistiques fiables et cohérents, quel que soit le niveau de découpage concerné, doivent être privilégiés.

En utilisant les indices de Gini, les analystes de l'OCDE ont ainsi pu constater qu'au sein de l'Union Européenne, les femmes gagnent en moyenne 16% de moins que les hommes par heure de travail prestée. [4] Parmi les nombreux indicateurs statistiques répertoriés dans la littérature économique, les indices de la famille de Gini, ainsi que ceux de la famille de l'entropie généralisée sont généralement les plus employés. Ces indicateurs possèdent des propriétés intéressantes parmi lesquelles figure une règle de décomposition permettant l'évaluation des inégalités de revenus à l'intérieur et entre les différents sous-groupes formés sur la base des divers critères de partitionnement. Initialement présentée comme le résultat de la conjonction des deux notions clés que sont l'*agrégativité* et l'*additivité*, la propriété de décomposition en sous-groupes est développée et affinée par de nombreux auteurs tels que Bourguignon (1979), Cowell (1980a, 1980b), Shorrocks (1980, 1984, 1985, 1986) ou encore Ebert (1988, 2010). L'application d'une telle condition de séparabilité semble alors parfaitement indiquée dans le cadre d'une étude des disparités de revenus.

L'objet de cette thèse est de proposer de nouveaux outils d'évaluation visant à améliorer la mesure des inégalités de revenus ainsi que celle de la mobilité des revenus en tenant compte des préférences

4. voir, OECD (2014).

d'un décideur politique. Nous nous intéressons en particulier aux contextes dans lesquels il peut être pertinent de faire appel à l'outil de décomposition en sous-groupes.[5] Proposée pour la première fois dans un cadre d'étude unidimensionnel principalement axé autour des inégalités, le champ d'application de la décomposition en sous-groupes s'élargit progressivement à des domaines plus variés pouvant impliquer plusieurs dimensions d'analyse tels que la pauvreté, la ségrégation ou encore la mobilité. Car s'il est nécessaire à un décideur politique de connaître l'intensité des inégalités de revenus dans son pays à un instant donné, il lui est d'autant plus utile de pouvoir suivre les évolutions de celle-ci, afin de juger de l'impact des actions redistributives engagées pour y remédier. Une étude de la mobilité des revenus entre les individus de la population doit pour cela être effectuée. La mobilité peut se définir (au sens large de l'OCDE) comme une progression sociale due à une multitude de facteurs, qui est le reflet de la réussite économique individuelle. Elle peut se mesurer de diverses façons mais son évaluation reste conditionnée par la longueur de l'intervalle de temps retenu pour l'étude.

Nos développements portent essentiellement sur l'analyse des flux/mouvements de revenus au cours du temps. Plus précisément, nous nous intéressons à l'évolution des écarts de revenus observés entre les individus, selon s'ils partagent ou non une caractéristique commune. Au-delà des informations collectées sur la réussite (ou l'échec) économique des individus, une telle approche fournit également des renseignements relatifs au niveau de croissance.[6] L'étude de la mobilité des revenus constitue ainsi un bon complément aux études préliminaires sur les inégalités, dont les conclusions ne sont que l'expression d'un point de vue statique. La connexion entre inégalité et mobilité est en effet bien

5. Une attention particulière est portée à la méthode de décomposition faible en sous-groupes axiomatisée par Ebert (2010).

6. L'agrégation des mesures de mouvements de revenus individuels fournit notamment une bonne évaluation de la croissance des revenus au sein d'un pays.

réelle et se résume parfaitement par l'allégorie bien connue de Schumpeter sur la conception des hôtels.

"*The rooms at the top are luxurious, those on the middle levels are ordinary and those in the basement are downright shabby. [...] The difference in the quality of hotel rooms at each point in time is called inequality. The movement of hotel guests among rooms of different quality is mobility. One way in which these are linked is that the more movement of guests there is among rooms, the greater the long-term equality of accommodations.*" [Fields (2000), p. 101].

Un changement dans la valeur du revenu peut cependant être lié à un « changement systématique » couramment observé dans les modèles du cycle de vie. [7] Pour pouvoir apprécier la nature réelle de ces changements de revenus, il est encore une fois nécessaire de pouvoir disposer des outils appropriés.

Un point qui nous semble essentiel dans l'appréciation de l'inégalité comme de la mobilité, est l'aspect aussi bien personnel qu'interpersonnel des comparaisons de revenus qui servent généralement de base à l'évaluation. S'il est établi et reconnu [8] qu'à un instant t un individu est soucieux de connaître le niveau de revenu détenu par les autres individus de la population, la littérature reste silencieuse sur le comportement adopté lorsque le facteur temps entre en ligne de compte. Dans notre approche, nous considérons que les individus sont par nature envieux et qu'ils le restent au cours du temps. Sur la base d'une telle hypothèse, nous préconisons l'emploi de deux familles de mesures qui tiennent compte de l'ensemble des comparaisons de revenus personnelles (*c.-à-d.*, qui ne concernent qu'un seul et unique individu) et interpersonnelles (*c.-à-d.*, entre deux individus distincts) pour évaluer le niveau d'inégalité ou de mobilité au

7. Cet argument est notamment avancé par Jäntti et Jenkins (2013) qui font référence à la courbe des salaires connue pour suivre une courbe en forme de U inversé avec l'âge.

8. Voir entre autres Elster (1991).

sein d'une population subdivisée en plusieurs sous-groupes. Notre première famille d'indicateurs est introduite pour mesurer le niveau d'inégalité à l'intérieur et entre les différents sous-groupes formés au sein d'une même population dans le but de faciliter et d'orienter l'élaboration de schémas de redistribution. Nos indicateurs présentent l'avantage de posséder une structure très proche à celle de l'indice de Gini standard. Leur structure diffère néanmoins de ce dernier selon la valeur de deux paramètres α et δ que nous introduisons à l'instar de Zheng (2007a), pour capter les préférences du décideur politique. Nous qualifions alors cette famille de mesures à 2 paramètres de $(\alpha, \delta)-$Gini. Nous considérons en effet que les préférences politiques du planificateur social ne doivent pas être négligées au cours de l'évaluation car elles jouent un rôle important dans la prise de décision. Plus un décideur politique est sensible aux disparités de revenus, plus il va être enclin à la mise en place d'actions redistributives visant à réduire les écarts de revenus constatés. Ces actions peuvent être centrées sur un sous-groupe d'individus dont les revenus sont en moyenne inférieurs à ceux des individus des autres sous-groupes formés, auquel cas nous considérons que l'intensité de ces actions va dépendre du degré de sensibilité aux inégalités intergroupes (pures) du décideur, noté β. Si en revanche, les actions redistributives visent les individus dont le revenu semble substantiellement inférieur à ceux du reste de la société, quel que soit leur sous-groupe d'appartenance, cela signifie que le décideur politique est davantage sensible aux extrémités de la distribution. La portée de ces actions dépend alors de la valeur de son degré de sensibilité pour les inégalités α, qui peut lui même être soumis à l'influence des orientations politiques du décideur intégrée dans la valeur du paramètre δ.

La seconde famille de mesures à laquelle nous nous intéressons correspond à la mesure agrégée des changements par tête des logarithmes des revenus. Il s'agit d'une mesure de mouvements de revenus introduite dans la littérature dans les années 90 par Fields et Ok (1996, 1999a, b). En dépit des bonnes propriétés statistiques que remplit la mesure agrégée des changements par tête des logarithmes des revenus, sa formulation telle qu'elle est exprimée par ces auteurs, fait abstraction des changements de revenus qui s'opèrent entre les différents individus d'une population. Seuls les mouvements de revenus personnels (*c.-à-d.*, les variations du revenu d'un même individu observées sur l'intervalle de temps prédéfini) sont quantifiables et exploitables. Nous montrons qu'une telle conception des mouvements de revenus est restrictive et tend à sous/sur-évaluer le niveau réel de mobilité au sein d'une population. Pour remédier à cela, nous proposons une reformulation de la mesure agrégée par tête du logarithme des revenus. La réécriture de cette mesure est cohérente avec une nouvelle forme de décomposition interpersonnelle[9] que nous introduisons afin d'étudier les mouvements de revenus se produisant au sein d'un même sous-groupe et entre les différents sous-groupes.

Une grande importance est attachée aux fondements axiomatiques des familles de mesures précédemment mentionnées. L'origine de l'axiome de décomposition faible ainsi que celle de plusieurs principes normatifs est notamment étudiée en détail. Ces différentes notions font appel à des aspects théoriques et techniques que nous ne manquons pas de rappeler, mais leur intérêt serait bien moindre si nous ne pouvions les utiliser pour des études empiriques. Pour illustrer nos propos, nous travaillons avec deux bases de données issues d'enquêtes indépendantes puisqu'il s'agit de l'enquête française « Budget des Familles (BDF) 2005-2006 » réalisée par l'Insee et mise à notre disposition par le centre Maurice Halbwachs et de l'enquête britannique "British Household Panel Survey (BHPS)", conçue par le centre d'études longitudinales du Royaume-Uni ("*ESRC UK Longitundinal Studies Centre*") en association avec l'institut de recherches sociales et économiques de l'Université d'Essex.

9. Pour formuler cette propriété, nous nous inspirons de la décomposition faible au sens d'Ebert (2010).

A partir de notre première base d'enquête (BDF), nous évaluons les disparités de revenus entre les hommes et femmes, en France pour l'année 2005. Divers critères de partitionnement supplémentaires tels que le niveau de qualification professionnelle, ou le niveau d'éducation des individus sont envisagés afin d'identifier les facteurs à l'origine des éventuelles inégalités de revenus qui seraient constatées au sein de notre échantillon. Les récentes études publiées par l'OCDE révèlent en effet que plus les dotations des individus sont faibles, moins ils investissent dans leur niveau d'éducation. Nous pouvons par conséquent nous attendre à ce qu'un tel comportement se répercute directement sur les niveaux de qualification professionnelle individuels et de fait sur le montant des revenus. Le choix de ces critères de partitionnement pour nos applications semble donc pertinent. L'étude des mouvements de revenus, ou plus largement de la croissance des revenus, nécessite des données de panel longitudinales. Nos exemples illustratifs ne peuvent donc pas être réalisés à partir de l'enquête (BDF), qui est une coupe instantanée. Parmi les nombreuses bases de données existantes, nous retenons les données issues de l'enquête britannique (BHPS). L'utilisation de ces données pour l'étude des changements économiques et sociaux est notamment recommandée par Taylor *et al.* (2010). Ils insistent sur le fait que cette enquête se positionne à la fois au niveau individuel et au niveau des ménages afin d'offrir un large choix d'étude et d'être la plus représentative possible de la population du Royaume-Uni. Nous retenons une période d'étude de 18 ans (entre 1991 et 2008) afin de réaliser deux études empiriques. Nous évaluons les changements de revenus personnels et interpersonnels en Grande Bretagne [10] en fonction de la situation familiale ou plus généralement du statut économique renseigné par les individus. Les principaux responsables de l'enquête spéciale sur les revenus nets annuels des ménages que nous utilisons

10. Certaines données de l'enquête relatives à l'ensemble de la population du Royaume-Uni ne permettent de suivre les individus que sur un très court intervalle de temps. Nous choisissons donc de nous focaliser uniquement sur le territoire de Grande Bretagne, pour lequel les données sont plus complètes.

dans nos illustrations sont Bardasi, Jenkins, Levy, Sutherland et Zantomio, notamment connus pour leurs travaux sur la mobilité des revenus. Une des particularités fort appréciable de l'enquête BHPS tient au fait que les mêmes individus sont suivis au fil du temps. [11]

Notre thèse se présente sous la forme de 3 chapitres. Après avoir rappelé le principe et la portée de la propriété de décomposition faible en sous-groupes dans le contexte des inégalités de revenus, nous précisons au cours de notre chapitre 1, les propriétés normatives des indicateurs compatibles avec ce schéma de décomposition. Nous énonçons notamment des principes de transferts intra- et intergroupes afin de fournir des moyens d'actions représentatifs des préférences d'un décideur politique. Nous montrons ensuite que l'application de la décomposition faible en sous-groupes se généralise aisément à l'étude de la mobilité des revenus et introduisons des instruments de mesures cohérents avec cette condition de séparabilité dans notre chapitre 2. Nous revenons finalement sur les fondements axiomatiques de cette propriété de décomposition en sous-groupes dans un troisième et dernier chapitre au cours duquel nous proposons des fonctions de pondération plus générales mais néanmoins conformes aux schémas de décomposition en sous-groupes usuels puisqu'elles tiennent compte des caractéristiques de la population (par ex., moyennes des revenus et tailles des sous-groupes). Cette généralisation de la propriété de décomposition faible en sous-groupes nous permet, en plus, de caractériser axiomatiquement nos mesures $(\alpha, \delta)-$Gini, mentionnées précédemment.

11. La plupart des enquêtes ne permettent généralement de suivre un même individu que sur une courte période de temps (par exemple, les données EU-SILC fournissent les informations relatives à un même individu sur une période de 4 ans seulement).

Chapitre 1

Généralisations de la décomposition de l'$\alpha-$Gini en sous-groupes

1.1 Introduction

Dans la littérature des inégalités, la propriété de décomposition en sous-groupes permet de compléter la fonctionnalité de l'indicateur statistique. Au-delà du fait d'évaluer l'ampleur des inégalités sur l'ensemble d'une population donnée, il s'agit de pourvoir déterminer leurs causes. De multiples critères socioéconomiques peuvent en effet être à l'origine des disparités constatées au sein d'une société. La propriété de décomposition en sous-groupes donne ainsi la possibilité de fournir une évaluation précise des inégalités selon les divers critères de partitionnement retenus pour analyse. Si l'emploi de cette propriété n'est pas encore très répandu au début des années 70, elle prend tout son sens avec les travaux précurseurs de Bourguignon (1979).

Qu'il soit question d'*agrégativité* ou d'*additivité* – deux notions clés introduites par Bourguignon (1979) – la population sur laquelle s'effectue la mesure de l'inégalité doit pouvoir être partitionnée en plusieurs sous-groupes d'individus exclusifs et exhaustifs. Le choix des critères de partitionnements joue un rôle déterminant dans l'analyse des disparités. Parmi les critères les plus utilisés dans la littérature figurent, entre autres, celui du sexe, de l'origine ethnique, de l'état de santé ou encore du niveau d'éducation. Une telle propriété permet ainsi d'aborder les inégalités sous différentes perspectives et de traiter de thématiques au centre des débats économiques telles que la discrimination, l'éducation, la protection sociale, *etc.*

Plusieurs méthodes de décomposition en sous-groupes sont aujourd'hui répertoriées dans la littérature. Elles constituent pour la plupart des interprétations diverses et variées d'une même propriété axiomatique ciblant des mesures d'inégalité spécifiques. A la base du concept de décomposition, se trouve un principe simple et intuitif : l'agrégativité. Par définition, [1] un indicateur est agrégatif s'il fournit une évaluation des disparités au sein de chaque sous-groupe et entre ces derniers, en fonction de leur taille et de leur moyenne respectives. La connaissance des caractéristiques exactes des distributions des sous-groupes n'est pas nécessaire pour déterminer les inégalités. Bourguignon (1979) utilise notamment ce principe pour démontrer que l'inégalité globale peut s'exprimer comme la somme des inégalités mesurées à l'intérieur de chaque sous-groupe (composante intragroupe) avec la somme des inégalités entre les différents sous-groupes (composante intergroupe). [2] Rien ne garantit cependant que l'agrégation des mesures d'inégalité obtenues à l'intérieur des divers groupes, converge vers la composante intragroupe. Une condition supplémentaire est pour cela nécessaire. La mesure doit être additive.

1. Voir, Bourguignon (1979).
2. Pour une présentation formelle voir Mornet, Mussard, Seyte, Terraza (2014).

L'additivité impose que la somme des inégalités observées à l'intérieur de chaque partition soit égale à la composante intragroupe. La composante intergroupe se déduit de l'écart observé entre les revenus moyens de chaque sous-groupe. Ces conditions sont plus restrictives que celles imposées par l'agrégativité. A l'issue des travaux de Bourguignon (1979), Cowell (1980,1985) et Shorrocks (1980,1984), seules les mesures de la famille de l'entropie généralisée (à commencer par l'indice de Theil (1967)) sont cohérentes avec la notion de décomposition additive. Toute mesure de la famille de l'entropie généralisée s'exprime en effet comme une moyenne pondérée des inégalités au sein de chaque sous-groupe (composante intragroupe) à laquelle s'ajoute la mesure des inégalités entre les moyennes de revenus des différents sous-groupes (composante intergroupe).

En dépit des quelques critiques[3] qui lui sont adressées, la décomposition additive au sens de Shorrocks (1980, 1984) reste largement employée dans la littérature. Son application est même envisagée dans le cas de l'indice de Gini.[4] Ebert (1988a) démontre que lorsque les distributions de revenus ne se chevauchent pas, l'indice de Gini est compatible avec la propriété de décomposition additive. Les cas de non chevauchement entre distributions restent néanmoins assez rares et sans cette restriction, la structure du Gini est incompatible avec un tel procédé de séparabilité.

3. Foster et Shneyerov (2000) soulignent une absence d'indépendance entre les coefficients de la décomposition et la contribution intergroupe. Ils suggèrent alors une méthode de décomposition basée sur des composantes indépendantes ("*path independent decomposition*") pour tenter de pallier ce problème mais son emploi reste limité [voir, Mornet *et al.* (2014) pour détails].

4. Cet indicateur possède plusieurs formulations qui peuvent soit faire ressortir la relation de dépendance entre les rangs des individus, soit exprimer cet indicateur comme une mesure des écarts de revenus (entre paires d'individus).

La décomposition en sous-groupes de l'indice de Gini soulève un certain nombre d'interrogations et alimente de nombreux sujets de recherche. La littérature recense à l'heure actuelle plus d'une quinzaine de méthodes de décomposition pour ce seul indicateur [voir entre autres, Yitzhaki (1998), Mussard (2004) ou Mornet *et al.* (2014)]. Parmi ces nombreuses méthodes peu d'entre elles résistent aux critiques adressées à leur encontre. Les approches matricielles de Rao (1969), Pyatt (1976) et Silber (1989) se révèlent insatisfaisantes, au même titre que les approches par les courbes de concentrations suggérées par Bhattacharya et Mahalanobis (1967) ou Lambert et Aronson (1993).

La principale difficulté à laquelle se heurtent les chercheurs tient à la structure même de l'indicateur. Par analogie au cas de l'entropie généralisée, la plupart des décompositions distinguent deux termes visant à évaluer les inégalités intra- et intergroupes. Peu à peu l'idée qu'une troisième composante puisse venir se greffer autour des deux composantes traditionnelles est envisagée. Longtemps assimilée à un terme résiduel, il faut attendre 1991 pour qu'elle soit enfin considérée comme une composante en tant que telle. [5] C'est en reprenant les travaux de Gini (1916, 1921) que Dagum (1997a, 1997b) donne tout son sens à cette troisième composante qui permet désormais de mesurer la *transvariation* des distributions (*c.-à-d.*, les zones où les distributions se chevauchent [6]).

L'indice de Gini semble partager un bon nombre de propriétés avec les mesures de l'entropie généralisée. Que ce soit sur le plan axiomatique (respect des propriétés de normalisation, invariance par réplication, invariance d'échelle ou par translation, décomposabilité) comme sur le plan normatif (respect du principe de transfert de Pigou-Dalton), ces mesures remplissent les critères de base

5. En 1991 Lerman et Yitzhaki assimilent cette troisième composante à un indice de stratification.

6. Ce terme est employé en référence à l'allure graphique que prennent les courbes.

nécessaires à un bon indicateur d'inégalité. Une nette distinction s'observe pourtant dans la littérature entre les mesures additivement séparables (dont les mesures de l'entropie font partie) et les mesures dépendant du rang (comme l'indice de Gini). Cette séparation trouve son explication dans l'approche duale qui permet de définir les fonctions de bien-être social correspondant à ces indicateurs. Comme l'explique Gajdos (2001), les modèles [7] qui sous-tendent les préférences rattachées à un indicateur tel que l'indice de Gini sont très spécifiques. Pour autant, ces deux familles d'indicateurs ne sont pas totalement disjointes.

Au cours de ce chapitre, nous montrons qu'il est possible de définir une famille de mesures d'inégalité décomposables selon un même procédé, qui possèdent des propriétés (normatives comme statistiques) au moins aussi bonnes que celles des mesures de l'entropie généralisée ou de l'indice de Gini. Nous concentrons nos recherches autour d'un indice générique, récemment introduit dans la littérature des inégalités. Nous qualifions cet indicateur de $\alpha-$Gini en raison de sa structure étroitement liée à celle de l'indice de Gini, mais qui contrairement à ce dernier, dépend d'un paramètre α.

En nous appuyant sur les récents travaux de Chameni Nembua (2006a, 2006b, 2011, 2013), Mussard et Terraza (2009) ou encore Ebert (2010), nous démontrons que l'ensemble des mesures de la famille du $\alpha-$Gini satisfont une forme généralisée à plusieurs niveaux de partition de la décomposition de Dagum (1997a, 1997b). Ce résultat s'inscrit dans la continuité des recherches de Chameni Nembua (2008) qui démontre la compatibilité entre le coefficient de variation élevé au carré et la décomposition en sous-groupes de Dagum. Cette méthode de décomposition jusqu'alors réservée au seul indice de Gini [8] contient

7. Il fait alors référence aux modèles d'espérance d'utilité dépendant du rang de Yaari (1987) et Quiggin (1982).

8. La méthode de Dagum n'est cependant pas la seule façon de décomposer l'indice de

les prémices de la notion de comparaison par paire de revenus, axiomatisée par la suite par Ebert (2010) et désormais connue sous le nom de décomposition faible. [9]

Un des principaux apports de notre approche se situe au niveau de la mesure des (non-)chevauchements entre les distributions, encore qualifiée de *distance économique directionnelle*, initialement suggérée par Dagum (1980, 1987). Nous modifions la structure de cet indicateur en introduisant un paramètre de *sensibilité au non-chevauchement* β. L'introduction de ce nouveau paramètre dote la distance économique ($\beta-$)directionnelle de propriétés normatives plus étendue que celles de l'indicateur de distance économique standard. Nous proposons notamment des schémas de redistributions intergroupes cohérents avec notre indicateur de distance. Nous adaptons pour cela les énoncés des principes de transferts usuels à un contexte d'inégalité intergroupe et énonçons les conditions nécessaires à leur application.

L'intérêt principal des mesures $\alpha-$Gini est qu'elles regroupent au sein d'une seule et même famille, des indicateurs de nature différente, tels que le coefficient de variation élevé au carré et l'indice de Gini. La réunion de ces indicateurs nous pousse à nous interroger sur les propriétés normatives de cette famille de mesures. En étudiant les impacts de divers principes de transferts sur la structure du $\alpha-$Gini, nous montrons que le paramètre α peut effectivement être considéré comme un paramètre d'aversion pour l'inégalité. Plus précisément, nous parvenons à établir que plus la valeur de α est grande ($\alpha > 2$), plus la dimension redistributive est importante. L'utilisation d'un tel indicateur pour mesurer les disparités de revenu, donne donc la possibilité d'ajuster les ac-

Gini. Okamoto (2009) construit, par exemple, sa décomposition autour de la *condition de distributions identiques* qui produit également des résultats intéressants.

9. Par opposition à la décomposition additive de Shorrocks (1980) souvent considérée comme forte.

tions redistributives en fonction du degré de sensibilité du décideur politique. L'introduction de notre indicateur de *distance économique $\beta-$directionnelle* au sein du procédé de décomposition du $\alpha-$Gini, nous permet d'augmenter de manière significative la précision de cet ajustement puisque nous tenons compte de deux paramètres de sensibilité à la fois : α et β.

Les différentes étapes de notre raisonnement sont présentées sous la forme de plusieurs paragraphes, inclus dans 5 sections. La Section 1.2 introduit l'indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle qui joue un rôle important dans le procédé de décomposition en sous-groupes de Dagum (1997a, 1997b). Nous généralisons ensuite cette méthode de décomposition à plusieurs niveaux de partitions et nous la reparamétrons afin qu'elle soit compatible avec la structure des $\alpha-$Gini, comme cela est expliqué en Section 1.3. Chacune de ces sections est illustrée par un exemple numérique construit à partir des données de l'enquête « Budget des familles 2005-2006 ». Pour simplifier la mise en œuvre du processus de décomposition, nous proposons une nouvelle macro commande Excel construite à partir de celle initialement formulée dans le cadre de la décomposition de Dagum.[10] Des éléments de conclusion sont apportés dans une Section 1.4 pour clore ce chapitre. L'ensemble des tableaux et autres calculs supplémentaires sont reportés en Annexes dans une Section 1.5.

1.2 La distance économique $\beta-$directionnelle

Dans cette Section, nous portons une attention particulière à l'indicateur de *distance économique directionnelle* défini par Dagum (1980, 1987). Cet indi-

10. voir Mornet (2013) pour les modalités d'utilisations.

cateur est par la suite introduit dans le processus de décomposition de l'indice de Gini pour compléter la définition de la composante d'inégalité intergroupe [*voir*, Dagum (1997a, 1997b)].

Notre développement s'articule en trois temps. Tout d'abord nous rappelons la formulation de chacune des composantes inhérentes à la décomposition en sous-groupes de l'indicateur de Gini proposée par Dagum (1997a). Nous nous focalisons ensuite sur l'indicateur de *distance économique directionnelle*. Nous modifions la structure de cet indicateur de distance afin que sa valeur tienne compte du degré sensibilité aux inégalités intergroupes β d'un décideur politique. Nous qualifions alors l'indicateur de *distance économique* $\beta-$*directionnelle*. L'introduction de ce paramètre de sensibilité permet de doter l'indicateur de distance de propriétés normatives intéressantes que nous étudions dans le détail. Enfin, pour illustrer nos propos, nous appliquons la décomposition de l'indice de Gini à un échantillon issu de l'enquête « Budget des familles 2005-2006 ». Nous envisageons différentes valeurs pour le paramètre de sensibilité β afin d'étudier le comportement des composantes intergroupes face à ces variations. Une telle étude a pour but de décrire le plus précisément possible le niveau d'inégalité de revenus entre les sexes en France pour l'année 2005.

1.2.1 La méthode de décomposition en sous-groupes de Dagum (1997a, 1997b)

La décomposition en sous-groupes de Dagum (1997a, 1997b) figure parmi les quelques méthodes de décomposition de l'indice de Gini qui comportent les arguments nécessaires pour résister aux critiques qui leurs sont adressées au cours du temps. Dagum propose un découpage de l'indicateur global en deux composantes principales, dont l'une d'elles peut-être déclinée en deux éléments complémentaires. La particularité de cette méthode tient notamment au fait que la spécification du troisième terme, longtemps assimilé à un terme résiduel, découle directement des travaux de Gini (1916) comme nous le rappelons dans les lignes qui suivent.

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ une distribution de revenus pour une population $\mathscr{P}$ de taille $n(\mathbf{x}) \equiv n$, telle que $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des réels de dimension n. La population $\mathscr{P}$ est scindée en K groupes homogènes. La distribution de revenu de chaque groupe se note $\mathbf{x}_k$ avec $k \in \{1, \ldots, K\}$ telle que $\mathbf{x}_k = (x_{1k}, \ldots, x_{ik}, \ldots, x_{n_k k})$ et $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_K)$. Nous notons $\mu(\mathbf{x})$ la moyenne arithmétique se rapportant à la distribution $\mathbf{x}$, telle que $\mu(\mathbf{x}) = 1/n \sum_{i=1}^n x_i$. Lorsque la distribution $\mathbf{x}$ est assimilée à une variable aléatoire x, son espérance mathématique se note $\mathbb{E}[x]$. L'indice de Gini mesuré sur une distribution $\mathbf{x}$ de taille n est défini par :

$$G(\mathbf{x}, n) := \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^n |x_i - x_r|}{2n^2(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})} \; ; \tag{Gini}$$

tel que $G(\mathbf{x}, n) \in [0; 1]$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Cet indicateur satisfait les principes axiomatiques de base que constituent la continuité (CN), la symétrie (SM), la normalisation (NM), le principe de transferts de Pigou-Dalton (PD), le principe d'invariance par réplication de la population de Dalton (PP) ainsi que l'invariance d'échelle (SI) [*cf.* entre autres, Blackorby et Donaldson (1978), Kolm (1976a, 1976b), Donaldson et Weymark (1980), Thon (1982)ou Ebert (1988a)]. L'indice de Gini se décompose en deux composantes principales, elles-mêmes subdivisées en plusieurs éléments qui permettent de cibler avec une plus grande précision les principaux responsables (groupes ou individus) des disparités observées.

L'**indice des inégalités intergroupes $\boldsymbol{G_{kh}}$**. Cette statistique introduite par Dagum (1987), permet de mesurer l'intensité des inégalités entre les groupes k et h. Elle se formule de la manière suivante :

$$G_{kh} := \frac{\sum_{i=1}^{n(\mathbf{x}_k)} \sum_{r=1}^{n(\mathbf{x}_h)} |x_{ik} - x_{rh}|}{n(\mathbf{x}_k) n(\mathbf{x}_h)(\mu(\mathbf{x}_k) + \mu(\mathbf{x}_h))} \ , \ \forall k; h \in \{1; \ldots ; K\} \ \text{ avec } k \neq h. \qquad (1)$$

L'**indice des inégalités intragroupes $\boldsymbol{G_{kk}}$** s'obtient directement en substituant k à h dans l'expression précédente. Soit :

$$G_{kk} = \frac{\sum_{i=1}^{n(\mathbf{x}_k)} \sum_{r=1}^{n(\mathbf{x}_k)} |x_i - x_r|}{2n^2(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)} \ , \ \forall k \in \{1; \ldots ; K\}.$$

Pour décomposer l'indice de Gini global à l'aide de ces deux indicateurs, le recours à des facteurs de pondération est nécessaire. Le coefficient de pondération p_k [resp. p_h] représente la proportion d'individus présents dans le groupe k [resp. h] relativement à l'effectif total. Le facteur s_k [resp. s_h] correspond à la part de revenus des individus du groupe k [resp. h] par rapport au revenu total de la population. De manière formelle, ces coefficients correspondent aux expressions suivantes :

$$p_k := \frac{n(\mathbf{x}_k)}{n(\mathbf{x})} \ ; \ p_h := \frac{n(\mathbf{x}_h)}{n(\mathbf{x})} \quad \textit{et} \quad s_k := \frac{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)}{n(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})} \ ; \ s_h := \frac{n(\mathbf{x}_h)\mu(\mathbf{x}_h)}{n(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})}$$

Il suffit alors de faire la somme des produits des différents termes ainsi définis pour obtenir les composantes principales de la décomposition en sous-groupes de l'indice de Gini. Ces composantes (contributions) sont les suivantes.

La **contribution d'inégalité intergroupe brute $\boldsymbol{G_{gb}}$** :

$$G_{gb} := \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} G_{kh} \ (p_k s_h + p_h s_k) \ ; \qquad (2)$$

La **contribution d'inégalité intragroupe G_w** :

$$G_w := \sum_{k=1}^{K} G_{kk}\ p_k\ s_k\ . \tag{3}$$

Dagum (1997a) énonce alors le théorème suivant :

$$G(\mathbf{x}, n) = \sum_{k=1}^{K} G_{kk}\ p_k\ s_k + \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} G_{kh}\ (p_k s_h + p_h s_k) = G_w + G_{gb}.$$

Le découpage en trois composantes résulte de l'introduction d'un terme intergroupe particulier que Dagum (1980, 1987) qualifie de *distance économique directionnelle*. Cette distance est construite sur la base de deux indicateurs complémentaires : la distance directionnelle brute (d_{kh}) et le moment d'ordre 1 de transvariation (p_{kh}). Une fois combinés, ils permettent d'estimer les écarts de revenus observés entre des individus appartenant à deux distributions différentes. Ces distributions sont généralement notées $\mathscr{P}_k$ et $\mathscr{P}_h$, telles que la moyenne de la distribution $\mathscr{P}_k$ est plus élevée que celle de la distribution $\mathscr{P}_h$, *c.-à-d.*, $\mu(\mathbf{x}_k) > \mu(\mathbf{x}_h)$.

La **distance directionnelle brute d_{kh}**. Il s'agit d'une moyenne pondérée des différences de revenus observées entre les plus hauts revenus des groupes les plus riches (en moyenne) et les revenus inférieurs des individus appartenant à des groupes moins aisés (compte tenu de leur moyenne) :

$$d_{kh} = \frac{1}{n_k n_h} \sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{rk} \geqslant x_{r'h}} (x_{rk} - x_{r'h}) \text{ avec } \mu(\mathbf{x}_k) > \mu(\mathbf{x}_h)\ ; \tag{4}$$

avec $n(\mathbf{x}_k) \equiv n_k$ et $n(\mathbf{x}_h) \equiv n_h$.

Le **moment d'ordre 1 de transvariation p_{kh}**. Il représente la moyenne pondérée des différences de revenus observées cette fois-ci entre les plus hauts revenus des groupes les plus pauvres (en moyenne) et les revenus inférieurs des individus situés dans des groupes plus riches (en moyenne) :

$$p_{kh} = \frac{1}{n_k n_h} \sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{r'h} > x_{rk}} (x_{r'h} - x_{rk}) \text{ toujours avec } \mu(\mathbf{x}_k) > \mu(\mathbf{x}_h). \qquad (5)$$

Lorsque la différence entre d_{kh} et p_{kh} est rapportée sur leur somme, nous obtenons ce que Dagum appelle la **distance économique directionnelle** notée D_{kh} :

$$D_{kh} = \frac{d_{kh} - p_{kh}}{d_{kh} + p_{kh}} \ , \quad \text{telle que} \quad D_{kh} \in [0; 1]. \qquad (6)$$

Cette distance est une mesure de non-chevauchement. Elle reflète l'ampleur des écarts entre les plus hauts revenus des individus appartenant aux groupes les plus riches (en moyenne) et les revenus plus faibles des individus situés dans des groupes moins aisés (au regard de leur moyenne). Les écarts de revenus observés sur la zone de transvariation sont captés par le **ratio de chevauchement**, comme cela est illustré dans la Figure 1.2.1 ci-après. Ce ratio capte les écarts entre les hauts revenus des individus appartenant aux groupes les moins riches (en moyenne) et les revenus moins élevés des individus des groupes les plus riches. Défini sur $[0; 1]$, il se note $(1 - D_{kh})$. Il existe, en effet, une relation de complémentarité entre ce ratio et la distance économique directionnelle [*cf.* Dagum (1980,1987)].

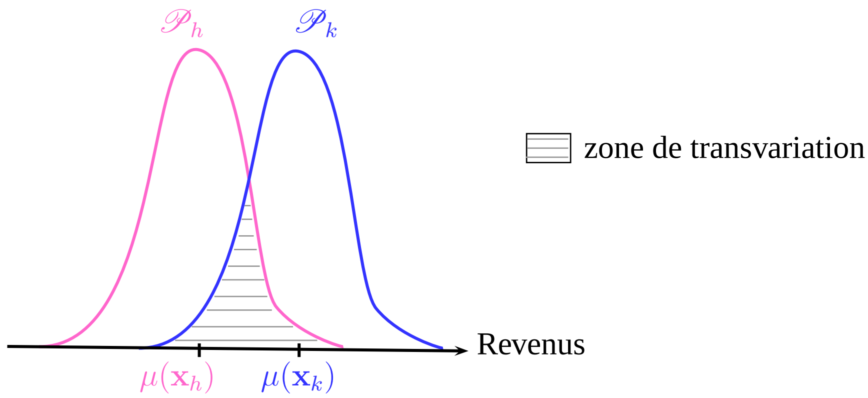

Figure 1.2.1. Phénomène de transvariation entre distributions de revenus.

Les propriétés statistiques rattachées à D_{kh} et $(1 - D_{kh})$ en font des éléments clés pour le processus de décomposition. Lorsqu'ils sont combinés (*via* une opération de produit) à la composante d'inégalité intergroupe brute G_{gb}, ils forment :

d'une part la **contribution d'inégalité intergroupe nette G_{nb}** :

$$G_{nb} := \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} G_{kh} D_{kh} (p_k s_h + p_h s_k) \ , \tag{7}$$

et d'autre part la **contribution d'inégalité de transvariation G_t** :

$$G_t := \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} G_{kh} (1 - D_{kh}) (p_k s_h + p_h s_k) \ ; \tag{8}$$

telles que :

$$G_{gb} = G_{nb} + G_t \ .$$

La distance économique directionnelle de Dagum offre des facilités d'interprétation. Lorsque cette distance est nulle, la décomposition du Gini global s'obtient simplement en ajoutant à la composante intragroupe, le terme de transvariation G_t. En effet, $D_{kh} = 0$ indique la présence de chevauchements parfaits entre les distributions. La nullité de la distance marque également l'égalité entre les moyennes des deux distributions considérées, soit $\mu(\mathbf{x}_k) = \mu(\mathbf{x}_h)$. De la même façon lorsque $D_{kh} = 1$, la composante d'inégalité intergroupe nette G_{nb} fournit une appréciation des disparités intergroupes pures, révélant ainsi l'absence totale de chevauchement entre les distributions étudiées. Aucun individu du groupe le moins riche (en moyenne) ne peut créer d'écart de revenu avec un individu appartenant au groupe le plus riche (en moyenne).

Compte tenu de l'importance du rôle joué par l'indicateur de distance économiques directionnelle, nous souhaitons enrichir sa structure d'un paramètre de sensibilité aux inégalités intergroupes afin d'intégrer dans le calcul les préférences du décideur politique. L'introduction de ce paramètre de sensibilité s'inscrit dans la continuité des travaux de Lerman et Yitzhaki (1984) qui cherchent à intégrer un paramètre d'aversion pour l'inégalité dans la formulation de l'indice de Gini. Dans le cas de la distance économique directionnelle, l'aversion pour l'inégalité ne peut qu'être de nature intergroupe. Nous envisageons alors différentes paramétrisations pour cet indicateur de distance. L'introduction du paramètre de sensibilité doit rester cohérente avec le principe de décomposition en sous-groupes suggéré par Dagum (1997a, 1997b). Nous souhaitons notamment conserver les propriétés liées au domaine de définition de la distance économique directionnelle initiale. Les valeurs 0 et 1 doivent rester des valeurs de référence pour un tel indicateur afin que son interprétation n'en soit pas affectée.

Soit β le paramètre représentant le degré d'aversion pour l'inégalité intergroupe d'un décideur politique, tel que $\beta \in \mathbb{R}_+$. Nous appliquons tout d'abord une puissance β aux différences binaires de revenus. Une telle opération a pour but d'accentuer (ou non) la perception des inégalités du décideur. La distance économique directionnelle se présente alors sous la forme suivante :

$$D_{kh}^{\beta} := \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{rk} \geqslant x_{r'h}} (x_{rk} - x_{r'h})^{\beta} - \sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{r'h} > x_{rk}} (x_{r'h} - x_{rk})^{\beta}}{\sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{rk} \geqslant x_{r'h}} (x_{rk} - x_{r'h})^{\beta} + \sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{r'h} > x_{rk}} (x_{r'h} - x_{rk})^{\beta}} \; .$$

La distance ainsi construite présente l'inconvénient majeur de ne plus être comprise [11] dans l'intervalle $[0; 1]$ dès lors que $\beta > 1$. L'indicateur de distance prend désormais ses valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$. Les résultats deviennent plus complexes à interpréter, notamment lorsque l'indicateur de distance ainsi paramétré tend vers -1. La valeur nulle ne peut plus être considérée comme valeur de référence. Un tel indicateur est en effet connu pour emprunter sa plus faible valeur dans les cas de chevauchements parfaits. Des contre-exemples numériques nous permettent de constater que la valeur -1 ne correspond pas systématiquement à des situations de chevauchements parfaits entre les distributions. Nous renonçons donc à une telle paramétrisation.

La formulation suivante que nous envisageons s'appuie sur les travaux de Dagum (1980, 1987). Ces travaux suggèrent l'existence d'une relation intrinsèque entre la structure de l'indicateur et le choix de la valeur d'un coefficient β d'*aversion pour l'inégalité intergroupe.* [12] Une telle relation nous conduit à faire appel à l'expression d'une distance généralisée à l'ordre β, définie par :

11. Pour retrouver les bornes de cet intervalle, il suffit de remarquer que :
$d_{kh}^{\beta} - p_{kh}^{\beta} \leqslant d_{kh}^{\beta} + p_{kh}^{\beta}$ et que $-d_{kh}^{\beta} - p_{kh}^{\beta} \leqslant d_{kh}^{\beta} - p_{kh}^{\beta}$.
En divisant chaque membre des inéquations par $d_{kh}^{\beta} + p_{kh}^{\beta}$, il apparaît alors que $-1 \leqslant D_{kh}^{\beta} \leqslant 1$.

12. *cf.* Dagum (1980), §2 p. 1794.

$$D_\beta := \frac{\left[\left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{rk}\geqslant x_{r'h}}(x_{rk}-x_{r'h})\right)^\beta - \left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{r'h}>x_{rk}}(x_{r'h}-x_{rk})\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}}{\left[\left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{rk}\geqslant x_{r'h}}(x_{rk}-x_{r'h})\right)^\beta + \left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{r'h}>x_{rk}}(x_{r'h}-x_{rk})\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}}$$

$\forall\beta \neq 0.$

Les propriétés normatives de cet indicateur se révèlent néanmoins trop restrictives, du fait de la présence de l'exposant $\frac{1}{\beta}$. Face à cette nouvelle impossibilité, la formulation suivante est suggérée :

$$D_{kh}(\beta) := \frac{\left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{rk}\geqslant x_{r'h}}(x_{rk}-x_{r'h})\right)^\beta - \left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{r'h}>x_{rk}}(x_{r'h}-x_{rk})\right)^\beta}{\left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{rk}\geqslant x_{r'h}}(x_{rk}-x_{r'h})\right)^\beta + \left(\frac{1}{n_k n_h}\sum_{r=1}^{n_k}\sum_{x_{r'h}>x_{rk}}(x_{r'h}-x_{rk})\right)^\beta}.$$

Cette dernière expression, que nous qualifions désormais de *distance économique $\beta-$directionnelle*, présente de bonnes propriétés [*cf.* Section 1.2.2]. De plus, lorsque $\beta = 1$, cette distance correspond en tout point à celle adoptée par Dagum (1987, 1997a). Compte tenu de la structure particulière de cet indicateur de distance, le paramètre β traduit le degré de sensibilité du décideur aux écarts observés entre les hauts revenus des individus situés dans les groupes les plus riches (en moyenne) et les revenus inférieurs appartenant à des individus de groupes moins riches (en moyenne). L'introduction de cette distance dans la décomposition en sous-groupes du Gini nous permet de capter différents degrés de sensibilité du décideur sur une zone ciblée de la population et de généraliser l'approche initiale [voir Mornet *et al.* (2013)], telle que :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, n) = &\sum_{k=1}^{K} G_{kk}\ p_k\ s_k + \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1} G_{kh}\ D_{kh}(\beta)(p_k s_h + p_h s_k) \\ &+ \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1} G_{kh}\ [1 - D_{kh}(\beta)](p_k s_h + p_h s_k). \end{aligned}$$

Il s'agit d'une décomposition en sous-groupes à un paramètre β. La prise en considération de ce degré de sensibilité offre une mesure plus fine des inégalités en sous-groupes, qui se veut plus représentative de la réalité économique. L'étude des propriétés statistiques et normatives qui découlent de cette nouvelle paramétrisation fait l'objet de la section suivante.

1.2.2 Les propriétés statistiques et normatives de la distance économique $\beta-$directionnelle

Dans les lignes qui suivent, nous étudions en détails les propriétés statistiques et normatives de la distance $\beta-$directionnelle, introduite à la section précédente. Cet indicateur mesure les écarts de revenus observés entre 2 distributions, sur les zones où elles ne se chevauchent pas. La mesure de ces écarts dépend du degré de sensibilité au non-chevauchement β du décideur politique. Plus la valeur de β est élevée, plus le décideur est sensible aux écarts créés par les forts revenus des individus appartenant aux groupes les plus riches (en moyenne) relativement aux autres groupes. Cette distance constitue avant tout une composante intéressante de la décomposition en sous-groupes du Gini. Elle permet de scinder la composante intergroupe brute en deux éléments visant à distinguer les inégalités de nature intergroupe pure (par rapport à la moyenne), des inégalités de transvariation. Plusieurs formulations peuvent être associées à cet indicateur. De manière générale nous supposons que l'expression de cette composante en univers discret est équivalente à celle qui prévaut lorsque l'univers est continu. Certaines formulations sont en effet plus faciles à manipuler et fournissent des résultats plus lisibles, c'est pourquoi nous utilisons différentes écritures. De plus, cela nous permet de fournir une illustration graphique de la distance directionnelle brute (d_{kh}) ainsi que du moment de transvariation (p_{kh}), à partir desquels la distance économique $\beta-$directionnelle est construite [voir, Mornet *et al.* (2013)].

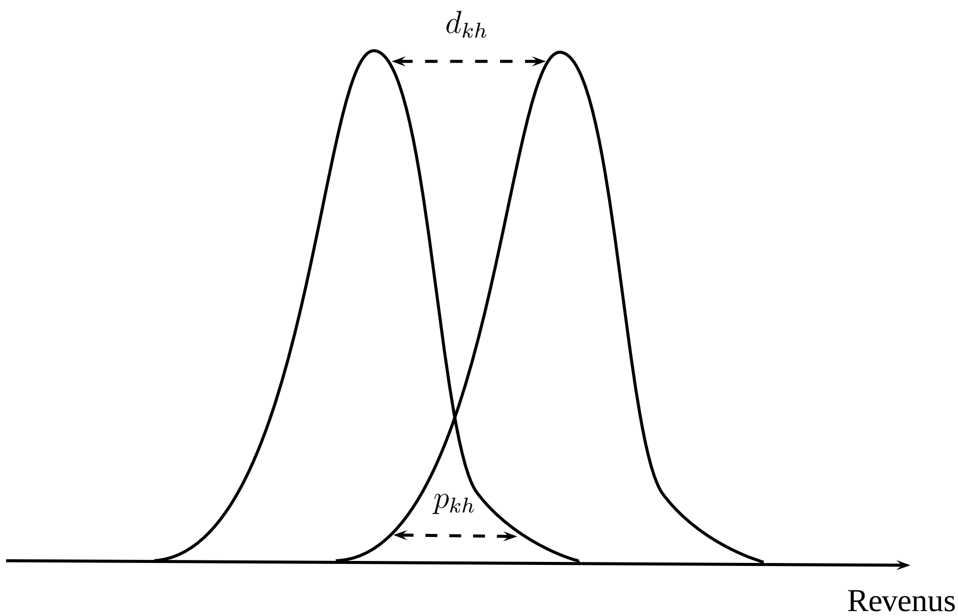

Figure 1.2.1. Distance directionnelle brute et moment de transvariation.

La formulation originale de Dagum (1980, 1987) concerne un unique degré de sensibilité au non-chevauchement entre les distributions ($\beta = 1$). Nous montrons que le fait d'autoriser le paramètre β à varier, en considérant $\beta \geqslant 1$, n'altère pas les propriétés statistiques de base de cet indicateur. La distance économique $\beta-$directionnelle reste notamment comprise dans l'intervalle $[0; 1]$. Cet intervalle nous sert de référence pour juger de l'intensité des chevauchements entre 2 distributions.

Dans ses écrits datés de 1980 et 1997, Dagum démontre que la distance économique brute ainsi que le moment de transvariation peuvent être exprimés en fonction des indicateurs d'espérances conditionnelles des revenus des divers sous-groupes. Il recourt pour cela à leurs expressions en continu, qu'il intègre à l'aide du théorème de Fubini-Lebesgue. [13] Il pose l'hypothèse que les distributions de revenus sont des variables aléatoires telles que $\mathbf{x} =: x$ et $\mathbf{y} =: y$ dont les fonctions de distributions cumulatives sont respectivement F_h et F_k. Les expressions de la distance directionnelle brute et du moment de transvariation sont telles que :

$$\begin{aligned} d_{kh} &= \int_0^\infty dF_k(y) \int_0^y (y-x) dF_h(x) \\ &= \mathbb{E}_k[yF_h(y)] + \mathbb{E}_h[yF_k(y)] - \mathbb{E}_h[y] \ , \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} p_{kh} &= \int_0^\infty dF_h(y) \int_0^y (y-x) dF_k(x) \\ &= \mathbb{E}_k[yF_h(y)] + \mathbb{E}_h[yF_k(y)] - \mathbb{E}_k[y]; \end{aligned}$$

où $\mathbb{E}_k[y]$ [resp. $\mathbb{E}_h[y]$] désigne l'opérateur mathématique d'espérance de la variable y dans le groupe k [resp. h].

Puisque la distance $\beta-$directionnelle fait appel aux indicateurs d_{kh} et p_{kh} élevés à la puissance β, nous pouvons écrire que :

13. Ce théorème permet de simplifier le calcul d'intégration. Dans le cas de deux variables, celles-ci peuvent être intégrées successivement. Il autorise également le changement des bornes d'intégration lorsque les domaines de définition des fonctions des variables concernées coïncident.

$$\begin{aligned} d_{kh}^{\beta} &= \left(\int_0^{\infty} dF_k(y) \int_0^{y} (y-x) dF_h(x)\right)^{\beta} \\ &= \left(\mathbb{E}_k[yF_h(y)] + \mathbb{E}_h[yF_k(y)] - \mathbb{E}_h[y]\right)^{\beta} \ , \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} p_{kh}^{\beta} &= \left(\int_0^{\infty} dF_h(y) \int_0^{y} (y-x) dF_k(x)\right)^{\beta} \\ &= \left(\mathbb{E}_k[yF_h(y)] + \mathbb{E}_h[yF_k(y)] - \mathbb{E}_k[y]\right)^{\beta} . \end{aligned}$$

Notons que ces formulations sont équivalentes aux formulations empiriques présentées dans la section précédente, à savoir :

$$d_{kh}^{\beta} = \left(\frac{1}{n_k n_h} \sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{rk} \geqslant x_{r'h}} (x_{rk} - x_{r'h})\right)^{\beta} \quad \text{et} \quad p_{kh}^{\beta} = \left(\frac{1}{n_k n_h} \sum_{r=1}^{n_k} \sum_{x_{r'h} > x_{rk}} (x_{r'h} - x_{rk})\right)^{\beta} \ ;$$

tel que $\mu_k := \mathbb{E}_k[y] > \mu_h := \mathbb{E}_h[y]$ avec $\mu(\mathbf{x}_k) \equiv \mu_k$ et $\mu(\mathbf{x}_h) \equiv \mu_h$.

Or nous savons que $D_{kh}(\beta) = \frac{d_{kh}^{\beta} - p_{kh}^{\beta}}{d_{kh}^{\beta} + p_{kh}^{\beta}}$, par conséquent nous pouvons réécrire l'expression de cette distance telle que :

$$D_{kh}(\beta) = \frac{2}{1 + \left(\frac{p_{kh}}{d_{kh}}\right)^{\beta}} - 1 \ , \tag{9}$$

avec $\beta \geqslant 1$.

Proposition 1.2.1

(i) $D_{kh}(\beta) = 0$ *si et seulement si* $\mu_k = \mu_h$.

(ii) $D_{kh}(\beta) = 1$ *si et seulement si* $p_{kh}^{\beta} = 0$.

(iii) $D_{kh}(\beta) \in [0; 1]$ *si* $\beta \geqslant 1$.

(iv) *Si* $D_{kh}(\beta) \in]0, 1[$, *alors* $D_{kh}(\beta)$ *est une fonction croissante de* β, *pour* $\beta \geqslant 1$.

Preuve.
Les points (i) à (ii) peuvent être dérivés directement à l'aide des définitions de d_{kh}^{β}, p_{kh}^{β} et $D_{kh}(\beta)$. (iii) Par définition, nous savons que si $\mathbb{E}_k[y] > \mu_h := \mathbb{E}_h[y]$ (*c.-à-d.*, $\mu_k > \mu_h$) alors $d_{kh}^{\beta} > p_{kh}^{\beta}$ conformément aux travaux de Dagum (1980, 1987). Comme la puissance β est supérieure ou égale à 1, son application n'altère pas le raisonnement de base. Par conséquent, nous déduisons que $D_{kh}(\beta) \in [0;1]$, pour tout $\beta \geqslant 1$. Le point (iv) se démontre aisément à l'aide de l'expression (9). Par construction nous avons $D_{kh}(\beta) \in]0;1[$ seulement si $\frac{p_{kh}}{d_{kh}} \in]0;1[$. Ainsi lorsque β augmente, tel que $\beta \geqslant 1$, alors $\left(\frac{p_{kh}}{d_{kh}}\right)^{\beta}$ diminue. La distance économique $\beta-$directionnelle $D_{kh}(\beta)$ est donc bien une fonction croissante de β, lorsqu'elle est comprise dans l'intervalle $]0;1[$. $\square$

La distance économique $\beta-$directionnelle respecte les propriétés essentielles, pour une distance directionnelle, mises en avant par Dagum (1980). La distance est nulle lorsque les distributions sont identiques, soit en d'autres termes, lorsqu'elles se chevauchent parfaitement. *A contrario*, elle prend la valeur 1 lorsque les distributions sont disjointes. De plus, le fait que la distance économique $\beta-$directionnelle soit comprise dans l'intervalle $[0;1]$ autorise des comparaisons entre les distances, pour différentes valeurs de β. L'ajout de cette puissance β permet de capter la sensibilité du décideur politique aux disparités intergroupes et de définir la mesure redistributive la mieux adaptée à la situation observée.

Pour mettre en avant la relation qui lie le paramètre β à la notion de sensibilité au non-chevauchement (ou sensibilité aux disparités intergroupes pures), nous analysons les répercussions des mesures redistributives (*c.-à-d.*, des transferts de revenus) qui pourraient être mises en place par l'autorité gouvernante. Dans le cas présent trois types de transferts retiennent notre attention. Les transferts au sens de Pen, les transferts au sens de Pigou et Dalton et le principe fort des transferts décroissants. La formulation de ces principes bien connus de la littérature des inégalités est adaptée en fonction la structure de notre indicateur [*voir*, Axiomes 1.2.1 et 1.2.2, p. 37-40]. Nous ciblons en effet l'indicateur de distance $\beta-$directionnelle et nous déterminons le signe de sa variation, notée $\Delta D_{kh}(\beta)$. Pour cela, nous comparons la valeur de l'indicateur avant et après l'application des transferts. La particularité de nos calculs tient au fait que la distance économique $\beta-$directionnelle est un indicateur intergroupe. Elle concerne donc toujours deux sous-groupes simultanément. Ces sous-groupes apparaissent sous les notations k et h, tels que le groupe k est supposé plus riche en moyenne que le groupe h, soit $\mu_k > \mu_h$. Pour démontrer nos différents résultats nous nous appuyons sur l'équation (9). Cette équation permet de faire clairement apparaître que la distance économique $\beta-$directionnelle est strictement décroissante en $\frac{p_{kh}}{d_{kh}}$, pour tout β. Il nous suffit donc d'étudier l'effet des différents transferts sur le ratio $\left(\frac{p_{kh}}{d_{kh}}\right)^{\beta}$, afin de déterminer la variation subie par l'indicateur de distance, et ce pour tout $\beta \geqslant 1$.

Le premier transfert que nous appliquons correspond au principe de la parade de Pen. Il s'agit d'une transformation élémentaire au cours de laquelle un transfert affecte le revenu d'un individu. On appelle :

décrément, un transfert négatif qui consiste à soustraire un montant $-\delta < 0$ de revenu à un individu.
incrément, un transfert positif qui consiste à ajouter un montant $+\delta > 0$ de revenu à un individu.

Imaginons, par exemple, qu'un décrément $-\delta < 0$ s'applique au revenu d'un individu i, situé dans le groupe k. Cette action va avoir pour effet de diminuer la distance (les écarts de revenus) entre le groupe k et le groupe h, puisque $\mu_k > \mu_h$, soit :

$$D_{kh}(\mathbf{x}_k - (\mathbb{1}_i^{n_k})\delta, \mathbf{x}_h, n_k, n_h, \beta) < D_{kh}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_h, n_k, n_h, \beta) \tag{Pen}$$

Pour que ce résultat soit valable, une condition nécessaire et suffisante est que les distributions des groupes k et h après transfert (*c.-à-d.*, après réduction du revenu de l'individu i) ne soient pas disjointes. Il doit exister un segment de chevauchements entre les distributions des deux groupes. Un résultat analogue est observé lorsqu'un incrément s'applique au revenu d'un individu j situé dans le groupe h ; comme nous le précisons la proposition ci-après.

Proposition 1.2.2 *Les variations de la distance économique $\beta-$directionnelle suite à une modification du revenu de l'individu i [resp. de l'individu j] situé dans le groupe k [resp. h], avec $\mu_k > \mu_h$, $\beta \geqslant 1$ et telles que les distributions des groupes k et h se chevauchent, sont :*

(i) $\Delta D_{kh}(\beta) < 0$ *si $i \in \mathscr{P}_k$ reçoit un* ***décrément*** $-\delta < 0$ *;*

(ii) $\Delta D_{kh}(\beta) < 0$ *si $j \in \mathscr{P}_h$ reçoit un* ***incrément*** $+\delta > 0$.

Preuve.
(i) Supposons qu'un décrément $-\delta < 0$ est appliqué au revenu d'un individu i situé dans le groupe k. Afin de déterminer l'impact d'un tel transfert sur $D_{kh}(\beta)$, nous nous concentrons sur les variations Δp_{kh}^{β} et Δd_{kh}^{β}. Rappelons en effet que :

$$D_{kh}(\beta) = \frac{2}{1 + \left(\frac{p_{kh}}{d_{kh}}\right)^{\beta}} - 1 \ . \tag{9}$$

Les effets d'un décrément $-\delta < 0$ sur le revenu de l'individu i sont :

$$\Delta d_{kh}^{\beta} = \frac{-\delta \cdot \beta}{n_k n_h} \cdot \# \{r' : x_{r'h} < x_{ik}\} \cdot d_{kh}^{\beta-1} \quad \text{et} \quad \Delta p_{kh}^{\beta} = \frac{\delta \cdot \beta}{n_k n_h} \cdot \# \{r' : x_{r'h} \geqslant x_{ik}\} \cdot p_{kh}^{\beta-1}.$$

Si $x_{ik} \in] \min_{r'}\{x_{r'h}\}; \max_{r'}\{x_{r'h}\}]$ alors, les cardinaux sont strictement positifs. Compte tenu du fait que le revenu de l'individu i est affecté par un décrément $-\delta < 0$, nous obtenons : $\Delta d_{kh}^{\beta} < 0$ et $\Delta p_{kh}^{\beta} > 0$, pour tout $\beta \geqslant 1$. Par conséquent, nous en déduisons que : $\Delta D_{kh}(\beta) < 0$, pour tout $\beta \geqslant 1$. Si

$x_{ik} \leqslant \min_{r'}\{x_{r'h}\}$, alors $\Delta d_{kh}^{\beta} = 0$ et $\Delta p_{kh}^{\beta} > 0$. En revanche, si $x_{ik} > \max_{r'}\{x_{r'h}\}$, alors $\Delta d_{kh}^{\beta} < 0$ et $\Delta p_{kh}^{\beta} = 0$. Dans les deux cas, nous avons bien : $\Delta D_{kh}(\beta) < 0$.

(ii) En appliquant un raisonnement analogue au cas (i), la preuve est immédiate. $\square$

Une illustration graphique des deux cas évoqués précédemment est proposée ci-après. Les individus i et j ont été placés de manière arbitraire sur les graphiques, leur position dans leur distribution respective n'influant pas sur le raisonnement. Lorsque l'individu i situé dans la distribution $\mathscr{P}_k$ est concerné par un transfert négatif $-\delta < 0$, son revenu diminue. Cette diminution se répercute sur la moyenne du groupe k qui diminue à son tour, entraînant ainsi un rapprochement des deux distributions k et h. La distance économique $\beta-$directionnelle entre ces deux groupes est réduite. De la même façon lorsque le revenu de l'individu j situé dans la distribution $\mathscr{P}_k$ augmente d'un montant infinitésimal $+\delta > 0$, suite à l'application d'un transfert positif, une augmentation de la moyenne du groupe h est perçue. Les distributions des deux groupes tendent à se rapprocher. La distance économique $\beta-$directionnelle est à nouveau réduite grâce à l'application du transfert.

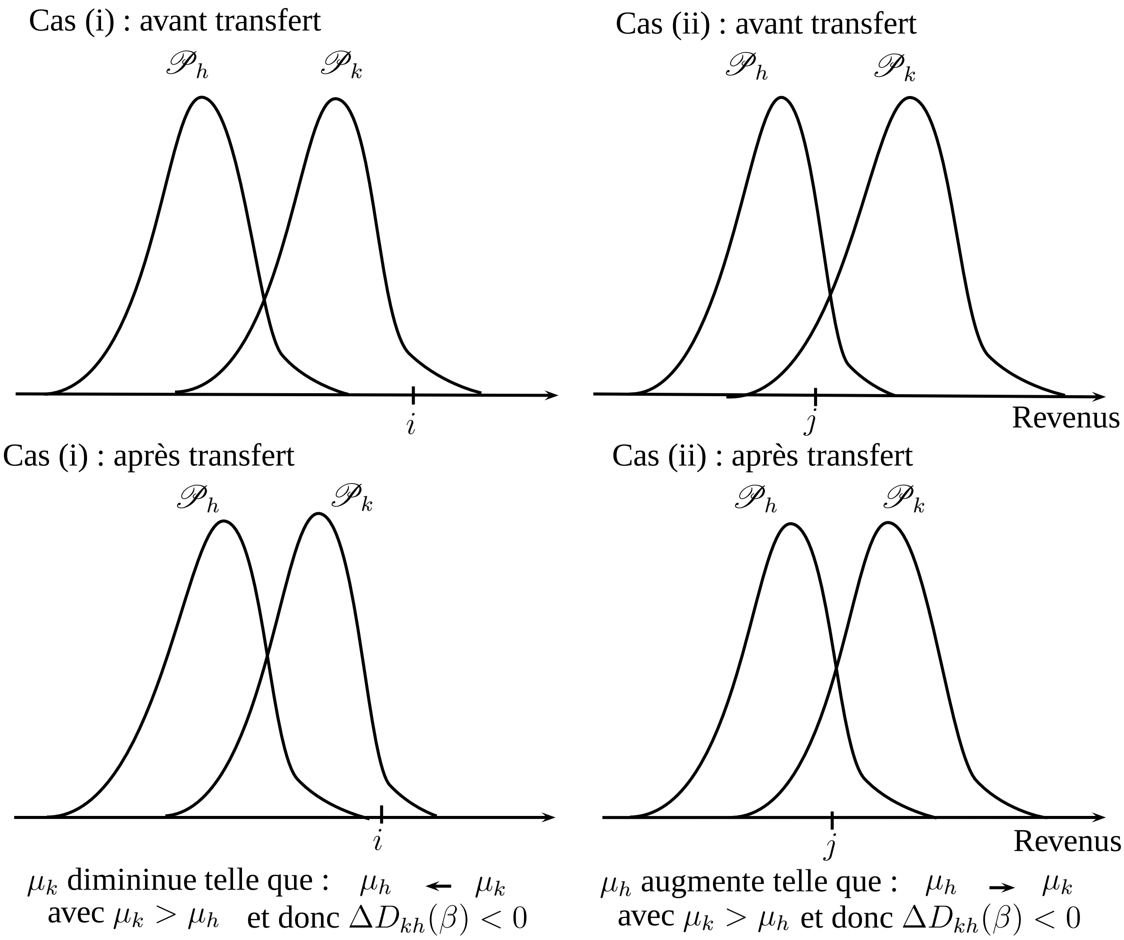

Figure 1.2.2. Variations de $D_{kh}(\beta)$

Un résultat opposé s'observe lorsque l'individu $i \in \mathscr{P}_k$ reçoit à son tour un incrément $+\delta > 0$. Dans ce cas, les écarts de revenus entre l'individu i et les individus du groupe h se creusent au détriment de la zone de transvariation qui se réduit. En d'autres termes, $\Delta d^{\beta}_{kh} > 0$ pendant que $\Delta p^{\beta}_{kh} < 0$, par conséquent, la distance économique $\beta-$directionnelle augmente, soit $\Delta D_{kh}(\beta) > 0$. Nous obtenons le même résultat si au moins un des deux effets n'est pas nul, ou encore si le transfert est négatif ($-\delta < 0$) et qu'il affecte le revenu de l'individu j situé dans le groupe h.

Si une action redistributive concerne des individus appartenant à des distributions de groupes qui ne se chevauchent pas, la distance économique $\beta-$directionnelle n'est pas affectée par les transformations, à condition que les distributions soient toujours disjointes après l'opération de transfert. En cas d'absence de chevauchement, nous savons, en effet, par définition que $p_{kh} = 0$. Par conséquent, même si d_{kh} est affecté par le transfert, le ratio $\frac{p_{kh}}{d_{kh}}$ reste nul et la distance entre les deux distributions ne varie pas. La distance n'est affectée par un tel transfert que s'il conduit à une variation positive du moment de transvariation (élevé à la puissance β) : $\Delta p_{kh}^{\beta} > 0$. Les conditions, dans lesquelles cette variation peut-être positive, sont spécifiées dans le corollaire suivant.

Corollaire 1.2.1 *Les variations de la distance économique $\beta-$directionnelle, suite à une modification du revenu de l'individu i [resp. de l'individu j] situé dans le groupe k [resp. h], avec $\mu_k > \mu_h$, $\beta \geqslant 1$ et telles que les distributions des groupes k et h* ***ne*** *se chevauchent* ***pas****, sont :*

(i') $\Delta D_{kh}(\beta) < 0$ *si* $x_{ik} - \delta < \max_{r'} \{x_{r'h}\}$ *tel que* $i \in \mathscr{P}_k$ *reçoit un* ***décrément*** $-\delta < 0$;

(ii') $\Delta D_{kh}(\beta) < 0$ *si* $x_{jh} + \delta > \min_{r} \{x_{rk}\}$ *tel que* $j \in \mathscr{P}_h$ *reçoit un* ***incrément*** $+\delta > 0$.

Les transferts envisagés jusqu'à présent ne concernent qu'un seul individu à la fois situé dans un groupe prédéfini. Il s'agit de la forme de redistribution la plus simple. Pour que les deux individus i et j soient simultanément concernés par une action redistributive, des *transferts intergroupes* doivent être appliqués. Si le transfert est tel que l'individu j du groupe h reçoit un montant de revenu $+\delta > 0$ de la part de l'individu i du groupe k, on dit que le transfert intergroupe est *progressif*. Le groupe k étant en moyenne plus riche que le groupe h, le transfert consiste à redistribuer du groupe le plus riche vers un groupe moins riche (en moyenne).

Axiome 1.2.1 – Principe de transfert intergroupe – (BPD). *Soient deux sous-groupes disjoints $\mathscr{P}_k$ et $\mathscr{P}_h$ pour lesquels les distributions $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_h$ sont rangées par ordre non-décroissant. Le transfert progressif d'un montant $\delta > 0$ entre les individus i et j, tels que $j \in \mathscr{P}_h$ et $i \in \mathscr{P}_k$ avec $\mu_k > \mu_h$, satisfont les conditions suivantes :*

$$x_{i-1k} \leqslant x_{ik} - \delta \ ; \tag{BPDa}$$

$$x_{jh} + \delta \leqslant x_{j+1h} \ . \tag{BPDb}$$

Le principe de transfert intergroupe pour la distance économique $\beta-$ directionnelle est strictement respecté si :

$$D_{kh}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_h + (\mathbb{1}_j^{n_h})\delta, n_k, n_h, \beta) < D_{kh}(\mathbf{x}_k - (\mathbb{1}_i^{n_k})\delta, \mathbf{x}_h, n_k, n_h, \beta).$$

Si, en revanche, l'individu j (du groupe h) fait don d'un montant $+\delta > 0$ de son revenu à l'individu i (du groupe k), le transfert va, alors, du groupe le moins riche vers le groupe le plus riche ($\mu_k > \mu_h$). Il est alors qualifié de transfert intergroupe *régressif*. Bien qu'inspirés du traditionnel principe de Pigou-Dalton, ces transferts diffèrent de ce dernier par le fait que les donneurs et receveurs n'appartiennent pas au même groupe. De plus, le rôle des individus i et j est déterminé en fonction de la moyenne du groupe auquel ils appartiennent et non en fonction de leur revenu respectif. Leur application n'en reste pas moins bénéfique pour l'indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle, comme l'indique la proposition ci-dessous.

Proposition 1.2.3 *La distance économique $\beta-$directionnelle mesurée entre 2 distributions se chevauchant, diminue suite à l'application d'un transfert intergroupe progressif entre l'individu i du groupe k et l'individu j du groupe h, tels que $\mu_k > \mu_h$.*

Preuve.
Un transfert intergroupe progressif résulte de la combinaison des deux transferts (incrément et décrément) présentés dans la Proposition 1.2.2. La variation (i) affecte le donneur pendant que la variation (ii) affecte le receveur. La combinaison de ces deux variations nous permet de conclure à une diminution de la distance économique $\beta-$directionnelle : $\Delta D_{kh}(\beta) < 0$. [14] $\square$

Le transfert intergroupe est donc *progressif en la moyenne*. La redistribution s'effectue du groupe le plus riche (en moyenne) k vers un groupe moins riche h, sans tenir compte de la position des individus dans leurs groupes respectifs, ou de manière générale dans la population mère. [15] Dans l'ensemble, ces transferts intergroupes réduisent la distance économique $\beta-$directionnelle entre les groupes k et h, ce qui accroît la pertinence de la composante de transvariation. La valeur de β influe en effet sur la composante de transvariation $G_{t,SK}^{\alpha,\beta}$, ainsi que sur la composante intergroupe nette $G_{nb,SK}^{\alpha,\beta}$ (par complémentarité). Ces deux composantes sont connues pour être sensibles aux écarts entre les moyennes de revenus des différents groupes [*voir* Dagum, 1980]. A l'inverse, si le transfert est *régressif en la moyenne*, nous obtenons des résultats opposés.

Corollaire 1.2.2 *La distance économique $\beta-$directionnelle entre 2 distributions se chevauchant, augmente suite à l'application d'un transfert intergroupe régressif entre l'individu i du groupe k et l'individu j du groupe h, tels que $\mu_k > \mu_h$.*

14. Pour rappel :
$$D_{kh}(\beta) = \frac{2}{1 + \left(\frac{p_{kh}}{d_{kh}}\right)^{\beta}} - 1 \ .$$

15. Le simple fait que les distributions se chevauchent constitue une condition suffisante à l'obtention du résultat souhaité. Le résultat est également valable si les conditions du Corollaire 1.2.1 sont vérifiées.

Preuve.
Mutatis mutandis dans la Proposition 1.2.3. $\square$

Des transferts entre individus d'un même groupe peuvent également être appliqués.[16] Si la distance économique $\beta-$directionnelle peut être considérée comme un indicateur à part entière, elle est, avant tout, une composante de la décomposition en sous-groupes du $\alpha-$Gini. Ses propriétés normatives doivent donc être cohérentes avec celles du $\alpha-$Gini, qui sont abordées dans la Section 1.3.1. Pour généraliser les transferts à 4 individus, nous faisons appel à une formulation particulière du principe des transferts décroissants. Cette formulation consiste à comparer l'effet de deux transferts progressifs ciblés sur le bas de la distribution de revenus. L'adaptation de ce concept à l'indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle est appelée *transferts intragroupes décroissants.*[17] Selon le positionnement des individus dans la distribution globale, deux cas peuvent se produire. Tout d'abord, l'effet d'un transfert intragroupe progressif entre les individus les plus pauvres du groupe h peut être comparé à un transfert de même ampleur appliqué sur les individus les plus pauvres du groupe k, tel que $\mu_k > \mu_h$. Par la suite, l'effet d'un transfert intergroupe régressif entre les individus les plus riches du groupe k peut-être opposé à celui d'un transfert de même montant s'appliquant entre les individus les plus riches du groupe h.

La localisation des 4 individus impliqués dans ces relations de transferts est déterminante et influe sur la distance économique $\beta-$directionnelle. Considérons les 4 individus i, j', j et i' répartis sur les deux groupes k et h (avec $\mu_k > \mu_h$), tels que $x_{ik} < x_{j'k}$ et $x_{jh} < x_{i'h}$. A la différence des cas précédents,

16. Le concept de *rich-to-poor money income transfers* au sein d'un même groupe est introduit par Lambert et Decoster (2005).

17. Il s'agit de la traduction littérale de "*within-group diminishing transfer*" (WDT). Ce principe s'inspire du principe des transferts décroissants de Kolm (1976).

nous constatons, après comparaison des effets de transferts progressifs appliqués aux deux groupes, que la distance économique $\beta-$directionnelle n'est plus sensible aux moyennes de revenus de chaque groupe. L'indicateur semble davantage sensible à la position de chaque individu au sein de leur distribution respective (*c.-à-d.*, à leur rang). Afin de définir les conditions d'applications de ces transferts, nous suggérons l'axiome suivant :

Axiome 1.2.2 – Principe des transferts intragroupes décroissants – (WDT). *Soient deux sous-groupes disjoints $\mathscr{P}_k$ et $\mathscr{P}_h$ pour lesquels les distributions $\mathbf{x}_k$ et $\mathbf{x}_h$ sont rangées par ordre non-décroissant. Les transferts progressifs d'un montant $\delta > 0$ entre les individus i et j' d'une part, et les individus j et i' d'autre part, tels que $\{j, i'\} \in \mathscr{P}_h$ et $\{i, j'\} \in \mathscr{P}_k$ avec $\mu_k > \mu_h$, satisfont les conditions suivantes :*

$$x_{ik} + \delta \leqslant x_{i+1k} \ ; \ x_{j'-1k} \leqslant x_{j'k} - \delta \ ; \tag{WDTa}$$

$$x_{jh} + \delta \leqslant x_{j+1h} \ ; \ x_{i'-1h} \leqslant x_{i'h} - \delta. \tag{WDTb}$$

Le principe des transferts intragroupes décroissants pour la distance économique $\beta-$ directionnelle est strictement respecté si :

$$D_{kh}(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_h + (\mathbb{1}_j^{n_h} - \mathbb{1}_{i'}^{n_h})\delta, n_k, n_h, \beta) < D_{kh}(\mathbf{x}_k + (\mathbb{1}_i^{n_k} - \mathbb{1}_{j'}^{n_k})\delta, \mathbf{x}_h, n_k, n_h, \beta).$$

Le principe des transferts intragroupes décroissants pour la distance économique $\beta-$directionnelle requiert que $D_{kh}(\beta)$ diminue suite à l'application d'un transfert progressif dans le groupe h (le moins riche en moyenne). La principale difficulté de ces transferts tient à la notion de rang, qui est capitale pour juger de l'impact des transferts sur la distance. Pour exprimer la distance entre le donneur et le receveur de chaque groupe en termes de rangs, nous comptabilisons les écarts entre les positions des individus comme s'ils appartenaient tous à un même groupe. Cela revient, par exemple, à supposer la position qu'un individu du groupe h occuperait s'il était placé dans le groupe k. Nous parvenons au résultat suivant :

Proposition 1.2.4 *La distance économique $\beta-$directionnelle satisfait strictement le principe des transferts intragroupes décroissants si et seulement si :*

$$\#\left\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\right\} < \#\left\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\right\}.$$

Preuve.
Supposons que l'individu j' alloue un montant $\delta > 0$ de son revenu à l'individu i ; j' et i étant tous 2 situés dans le groupe k. Comparons ce transfert avec la même opération redistributive ayant lieu entre l'individu i' et l'individu j situés dans le groupe h. L'étude des effets de ces transferts progressifs sur $D_{kh}(\beta)$ conduit au calcul des variations de d_{kh}^{β} et p_{kh}^{β}. Rappelons que :

$$\Delta d_{kh}^{\beta} = \beta \cdot \Delta d_{kh} \cdot d_{kh}^{\beta-1} \quad \text{et } \Delta p_{kh}^{\beta} = \beta \cdot \Delta p_{kh} \cdot p_{kh}^{\beta-1}.$$

Par définition : $\delta > 0$, $d_{kh}^{\beta-1} > 0$, $p_{kh}^{\beta-1} > 0$ et $\beta \geqslant 1$. Toutes les évaluations dépendent donc des signes de Δd_{kh} et Δp_{kh}.

Considérons le transfert progressif qui s'effectue au sein du groupe k :

$$\begin{aligned}\Delta d_{kh} &= \frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \left[\#\left\{r' : x_{ik} \geqslant x_{r'h}\right\} - \#\left\{r' : x_{j'k} > x_{r'h}\right\}\right] \\ &= -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \#\left\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\right\},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\Delta p_{kh} &= \frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \left[-\#\left\{r' : x_{r'h} > x_{ik}\right\} + \#\left\{r' : x_{r'h} \geqslant x_{j'k}\right\}\right] \\ &= -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \#\left\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\right\}.\end{aligned}$$

Donc $\Delta d_{kh} = \Delta p_{kh} = -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \# \{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\} \leqslant 0$.

Le transfert alternatif qui s'opère dans le groupe h, tel qu'il est défini dans le principe (WDT), conduit aux variations suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta d_{kh} &= \frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot [-\# \{r : x_{rk} > x_{jh}\} + \# \{r : x_{rk} \geqslant x_{i'h}\}] \\ &= -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \# \{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\},\end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}\Delta p_{kh} &= \frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot [\# \{r : x_{jh} \geqslant x_{rk}\} - \# \{r : x_{i'h} > x_{rk}\}] \\ &= -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \# \{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\};\end{aligned}$$

soit : $\Delta d_{kh} = \Delta p_{kh} = -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \# \{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\} \leqslant 0$.

Puisque dans les deux cas $\Delta d_{kh} = \Delta p_{kh} \leqslant 0$, nous déduisons que $\Delta d^{\beta}_{kh} \leqslant 0$ et $\Delta p^{\beta}_{kh} \leqslant 0$, pour tout $\beta \geqslant 1$. Compte tenu du fait que $\frac{p^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh}} < 1$, nous pouvons écrire que : $\frac{p^{\beta}_{kh} + \Delta p^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh} + \Delta d^{\beta}_{kh}} \leqslant \frac{p^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh}}$. Or,

$$D_{kh}(\beta) = \frac{2}{1 + \left(\frac{p_{kh}}{d_{kh}}\right)^{\beta}} - 1 \,. \tag{9}$$

La distance économique $\beta-$directionnelle ne diminue donc pas. Autrement dit : $\Delta D_{kh}(\beta) \geqslant 0$. Ce résultat reste valable pour les deux cas de transferts progressifs. En effet, nous avons :

$$\frac{p^{\beta}_{kh} + \Delta p^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh} + \Delta d^{\beta}_{kh}} \leqslant \frac{p^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh}} \Leftrightarrow 1 + \frac{\Delta p^{\beta}_{kh}}{p^{\beta}_{kh}} \leqslant 1 + \frac{\Delta d^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh}} \Leftrightarrow \frac{\Delta p^{\beta}_{kh}}{p^{\beta}_{kh}} \leqslant \frac{\Delta d^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh}}.$$

En substituant les définitions de Δd^{β}_{kh} et Δp^{β}_{kh} et en rappelant que $\Delta d_{kh} = \Delta p_{kh} \leqslant 0$, nous obtenons que :

$$\frac{p^{\beta}_{kh} + \Delta p^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh} + \Delta d^{\beta}_{kh}} \leqslant \frac{p^{\beta}_{kh}}{d^{\beta}_{kh}} \Leftrightarrow \frac{\Delta p_{kh}}{p_{kh}} \leqslant \frac{\Delta d_{kh}}{d_{kh}} \Leftrightarrow p_{kh} \leqslant d_{kh} \,,$$

ce qui, par définition, est toujours vrai.

Afin d'obtenir une plus faible augmentation pour le transfert progressif appliqué au groupe h, il est nécessaire que la variation associée à $\Delta d_{kh} = \Delta p_{kh} = -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \# \left\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\right\} \leqslant 0$ soit plus importante que celle obtenue à la suite de l'application du transfert progressif dans le groupe k. Soit :

$$-\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \# \left\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\right\} > -\frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \# \left\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\right\} \ ;$$

ce qui équivaut à :

$$\# \left\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\right\} < \# \left\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\right\}.$$

$\square$

Les cardinaux utilisés ci-dessus prennent en compte le nombre d'individus dans un groupe dont les revenus sont compris entre les revenus des individus de l'autre groupe, qui sont affectés par le transfert. De plus, le transfert progressif appliqué dans le groupe k cible des revenus situés dans la zone de chevauchement, tels que la zone de transvariation concernée par ce transfert est plus importante que celle couverte par le transfert progressif qui a lieu dans le groupe h. Le transfert progressif dans le groupe h entraîne alors une augmentation de la distance économique $\beta-$directionnelle moins importante, la zone de transvariation entre les groupes k et h (également concernée par un transfert) étant moins conséquente. La preuve de la Proposition 1.2.4 démontre que tout transfert progressif ne conduit pas automatiquement à une diminution de $D_{kh}(\beta)$. Dans le cas présent nous trouvons en effet que $\Delta D_{kh}(\beta) \geqslant 0$. Nous constatons notamment que les transferts opérés sur les groupes k et h tendent à accroître les disparités entre ces deux groupes. Ce résultat s'explique par le fait que les transferts progressifs réduisent la dispersion au sein de chaque groupe en modifiant la zone de chevauchement entre les deux groupes. Ainsi, plus la zone de chevauchement est réduite par le transfert progressif, plus la distance entre les distributions des deux groupes augmente. L'effet de la redistribution intragroupe sur les zones de chevauchement est étudié en détails par Lambert et Decoster (2005), dans le cadre du Gini standard ($\alpha = 1$).

Si le sens de l'inégalité de la condition invoquée sur les cardinaux dans la Proposition 1.2.4 est inversé, tel que : $\#\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\} < \#\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\}$, alors, les transferts ont un effet contraire. En recourant à des transferts régressifs tout en conservant le même raisonnement, nous obtenons $\Delta d_{kh} = \Delta p_{kh} = \frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \#\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\} \geqslant 0$ lorsque le transfert régressif est appliqué dans le groupe h. En revanche, une application du transfert régressif dans le groupe k, nous conduit à $\Delta d_{kh} = \Delta p_{kh} = \frac{1}{n_k n_h} \cdot \delta \cdot \#\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\} \geqslant 0$. Par conséquent, la distance économique $\beta-$directionnelle entre les deux groupes diminue. Notons que cette distance diminue d'autant plus lorsque le transfert régressif dans le groupe h concerne un plus grand nombre d'individus du groupe k (situés dans la zone de transvariation) que le transfert régressif du groupe k relativement aux individus du groupe h. Ce qui revient à écrire que : $\#\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\} > \#\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\}$.

Dès lors que la relation d'ordre entre les deux cardinaux est toujours vérifiée, nous obtenons des résultats analogues si les 4 individus appartiennent tous à un même et unique groupe. L'atout principal de ces transferts est qu'ils permettent de conserver la moyenne des groupes. Il est, par ailleurs, intéressant de comparer les effets d'un transfert intragroupe progressif avec ceux des transferts intergroupes, introduits dans la Proposition 1.2.3.

Envisageons par exemple que les individus i, i' et j' appartiennent tous les 3 au groupe k, alors que l'individu j est dans le groupe h. Il s'agit d'analyser les effets combinés des transferts intragroupes progressifs (ou régressifs) impliquant 2 individus du groupe k [resp. du groupe h] avec des transferts intergroupes progressifs (ou régressifs) entre un individu du groupe h [resp. k] et un individu du groupe k [resp. h]. Par souci de simplicité, nous postulons que les transferts sont tous du même montant $\delta > 0$ [voir Figure 1.2.3].

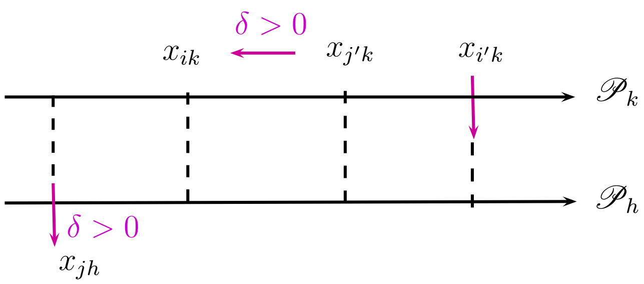

Figure 1.2.3. Transferts intra- et intergroupes combinés.

Les variations de la distance économique $\beta-$directionnelle se déduisent assez aisément à condition que les individus concernés par les relations de transferts soient situés au bas de la distribution globale. Cette restriction est imposée par la structure du $\alpha-$Gini. Elle nous permet d'établir que si l'individu le plus pauvre est situé dans le groupe h et bénéficie d'un transfert intergroupe progressif, alors par définition $\#\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\} = 0$. Par conséquent, la mise en place d'un transfert intragroupe progressif dans le groupe k n'a aucun impact sur l'indicateur de distance. La distance économique $\beta-$directionnelle diminue automatiquement grâce au transfert progressif entre l'individu i' du groupe k et l'individu j du groupe h. Par ailleurs, si les deux transferts progressifs ont lieu séparément dans chaque groupe, alors $\#\{r : x_{jh} < x_{rk} < x_{i'h}\} = \#\{r' : x_{ik} < x_{r'h} < x_{j'k}\}$ et dans ce cas $D_{kh}(\beta)$ reste inchangée.

Il apparaît donc clairement que l'application d'un transfert intragroupe progressif [resp. régressif] conduit à une augmentation [resp. diminution] de la distance économique $\beta-$directionnelle. La combinaison d'un tel transfert avec un transfert intergroupe progressif [resp. régressif] amène en revanche à un résultat opposé (*voir* Proposition 1.2.3). Dans notre configuration des revenus, les répercussions d'un transfert intragroupe progressif dans le groupe k entre les individus j' et i sont contrebalancées par celles d'un transfert progressif entre les individus i' du groupe k et j du groupe h. Le transfert intergroupe réduit ainsi l'écart entre les moyennes des deux groupes. Les deux distributions tendent à se rapprocher, ce qui se traduit par une baisse de l'indicateur de distance.

Dans le cas où les distributions des deux groupes se chevauchent, une diminution de la distance économique $\beta-$directionnelle peut être induite par un transfert progressif du groupe h vers le groupe k. La condition suffisante est que le donneur, qui se trouve être l'individu i' doit être moins riche que l'individu i du groupe k, receveur du transfert. Une représentation possible de la situation est proposée dans la Figure 1.2.4 ci-après.

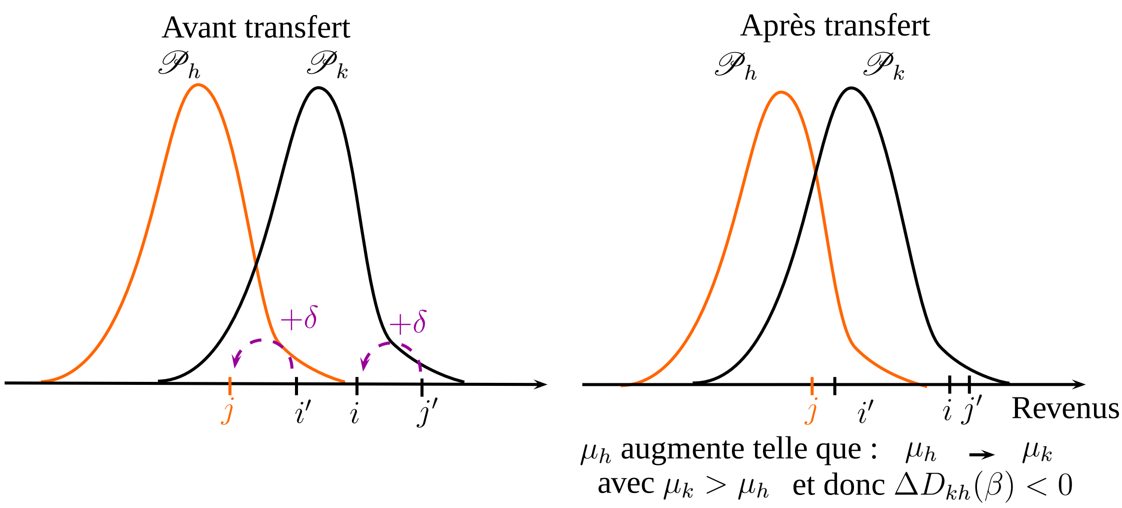

Figure 1.2.4. Transferts combinés lorsque les groupes se chevauchent.

Pour mieux comprendre ce résultat, il suffit de réécrire les différents transferts de manière à faire ressortir plus facilement le résultat souhaité [voir Figure 1.2.5]. Nous supposons que les transferts sont tous du même montant $\delta > 0$ et qu'ils préservent les rangs des individus. Le transfert progressif entre les individus j' et i ainsi que le décrément qui affecte le revenu de l'individu i' peuvent être interprétés de manière équivalente comme un transfert régressif entre l'individu i' (donneur) et l'individu i (receveur), auquel s'ajoute un transfert progressif intergroupe pour lequel l'individu j' est le donneur.

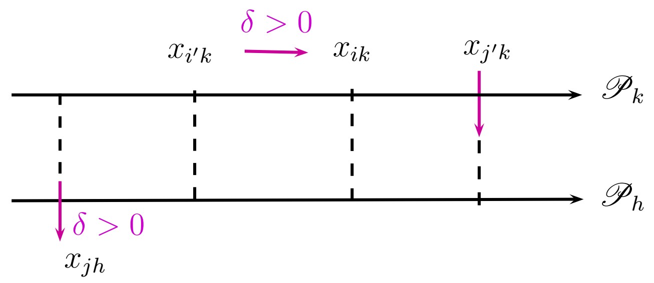

Figure 1.2.5. Réécriture des transferts combinés.

D'après les propositions introduites antérieurement, nous savons que ces deux transformations ont pour effet de réduire la distance économique $\beta-$directionnelle lorsque les distributions des deux groupes se chevauchent.

Les quelques exemples présentés dans cette section font référence à des configurations individuelles bien spécifiques et plutôt simples. Ils permettent de tirer rapidement les conclusions relatives à la mise en place d'éventuelles actions redistributives. Leur facilité d'interprétation ne se généralise pas aux configurations plus complexes. Celles-ci nécessitent une étude plus approfondie car les variations de la distance économique $\beta-$directionnelle ne peuvent être directement déduites. Des hypothèses supplémentaires doivent notamment être formulées. Ces hypothèses vont imposer des restrictions sur la taille des groupes h et k ainsi que sur les rangs des individus impliqués dans les relations de transfert.

L'emploi de ces divers principes de transferts va dépendre de la politique d'action que le décideur souhaite mener. Dans les cas où la distance économique $\beta-$directionnelle diminue, cela signifie qu'en contrepartie le $\beta-$ratio de chevauchement augmente, et inversement. Cette complémentarité tient à la structure particulière de la composante d'inégalité intergroupe brute mise en avant quelques lignes plus haut. Le paramètre β est ainsi associé à la notion de *sensibilité aux inégalités intergroupes nettes* que nous qualifions encore de *sensibilité au non-chevauchement*. Les propriétés normatives de la distance économique $\beta-$directionnelle sont multiples. Elles impliquent généralement des conditions portant, soit sur les moyennes des groupes, soit sur les rangs des individus, en fonction de la configuration des transferts. Ces conditions nécessaires assurent les retombées positives des actions redistributives mises en place par le décideur politique et justifient l'introduction d'un tel indicateur de distance dans le processus de décomposition de l'indice de Gini.

Pour illustrer ces résultats, nous appliquons la décomposition en sous-groupes de Dagum avec notre indicateur de distance dans la section suivante. Nous nous intéressons aux disparités de revenus entre les sexes observées en France en 2005. Au cours de notre étude, nous insistons sur l'importance du rôle joué par les préférences pour les inégalités intergroupes nettes du décideur en envisageant différentes valeurs pour le paramètre de sensibilité β.

1.2.3 Une illustration de l'utilisation de la distance économique $\beta-$directionnelle dans le cadre de la décomposition en sous-groupes

L'illustration proposée dans cette section a pour but de fournir une aide à l'interprétation des différentes composantes de la décomposition en sous-groupes de l'indice de Gini, lorsque la distance économique standard est remplacée par notre distance économique $\beta-$directionnelle. L'intérêt d'une telle propriété de décomposition se situe principalement au niveau empirique. Sa mise en pratique se doit donc d'être la plus simple possible. A la suite des travaux de Dagum (1997a, 1997b) plusieurs logiciels sont conçus afin de faciliter l'application de la décomposition en sous-groupes de l'indice de Gini. Une macro Excel est notamment programmée en 2001 par Dagum, Mussard, Seyte et Terraza en collaboration avec la SOCREES.[18] Pour les besoins de notre illustration, nous reparamétrons ce programme afin d'y intégrer la distance économique $\beta-$directionnelle. Le classeur Excel à partir duquel les calculs de notre illustration sont réalisés est disponible en libre accès sur le site internet du LAMETA : http://www.lameta.univ-montp1.fr/online/gini.html.

L'indice de Gini figure avec les mesures de l'entropie généralisée parmi les indicateurs les plus employés pour évaluer les inégalités. Il fournit une bonne évaluation des disparités de revenus et satisfait plusieurs techniques de décomposition, dont la décomposition en sous-groupes de Dagum. Le fait de substituer à l'indicateur de distance économique initialement défini par Dagum (1980, 1987), notre indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle, nous permet de tenir compte des préférences du décideur (matérialisées par β) face aux inégalités intergroupes nettes. L'introduction de ce paramètre de

18. Société de réalisation d'études économiques et statistiques

sensibilité nous permet de mieux appréhender les contributions de nature intergroupe issues du processus de décomposition. Au cours de cette illustration, nous testons plusieurs valeurs pour ce degré de sensibilité β. Nous considérons que β prend ses valeurs [19] entre 1 et 4. Ces valeurs sont représentatives d'une sensibilité pour l'inégalité intergroupe nette croissante manifestée par le décideur politique. Nous montrons que les modifications de la valeur du paramètre β influent principalement sur la composante intergroupe nette G_{nb} et la composante de transvariation G_t.

Notre étude porte sur les disparités de revenus observées en France entre les hommes et les femmes pour l'année 2005. Nous travaillons sur les données issues de l'enquête « Budget des familles 2005-2006 », menée par l'institut national français de la statistique et des études économiques (Insee). Ces enquêtes sont effectuées à un rythme quinquennal depuis 1979. Initialement conçues pour étudier les dépenses et les ressources des ménages, le champ d'application de ces enquêtes s'élargit en 1994 afin de permettre des comparaisons de niveaux de vie en termes d'inégalité et de pauvreté. La collecte des données s'effectue sur une période globale d'un an, à raison de plusieurs vagues échelonnées du 1^{er} mars 2005 au 27 février 2006. Différents questionnaires sont proposés aux individus afin de recueillir toutes sortes d'informations personnelles telles que leurs habitudes de consommation ou leur situation financière. Les informations collectées concernent des individus âgés de 0 à 100 ans, soit un total de 25 364 individus pour la période 2005-2006.

Les données sont échantillonnées au niveau du ménage mais seuls les revenus individualisés sont considérés pour notre analyse (conformément à la nomenclature des ressources individuelles fournies avec la base de données par le centre Maurice Halbwachs). De plus, nous souhaitons centrer notre étude sur

19. Les valeurs sont fixées de manière exogène.

les disparités de revenus qui affectent les individus âgés de 18 à 65 ans au 1^{er} janvier 2005. Les données relatives aux deux vagues d'enquêtes réalisées entre janvier et février 2006 sont donc soustraites de la base initiale, pour finalement retenir un échantillon de 14 281 individus représentatifs. Un tel échantillonnage permet de tenir compte des éventuels effets de substitution entre les individus d'un même ménage. La variable d'intérêt est le *revenu annuel individuel* (exprimé en euros). Elle est majoritairement composée des sources de revenu suivantes : les salaires et autres rémunérations liées à des activités secondaires ou occasionnelles[20], les revenus de l'épargne individuelle (tels que les intérêts de livrets d'épargne exonérés de type livret A, livret jeune, *etc.*) ainsi que d'autres compléments financiers hormis les prestations familiales (par exemple, allocations familiales, allocation de rentrée scolaire (ARS)) et les ressources exceptionnelles telles que l'héritage, les gains aux jeux de hasard ou les primes de licenciement.

Le choix d'un critère de partitionnement est décisif dans l'analyse des différentes composantes de la mesure d'inégalité globale. De ce critère découle le nombre de groupes d'individus (exhaustifs et exclusifs) qui doivent être construits à partir de la population totale. Plus le nombre de groupes est important, plus les composantes à agréger sont nombreuses et plus complexe est leur interprétation. Le fait de pouvoir subdiviser la population globale en différentes entités permet de faire ressortir les groupes dans lesquels les inégalités de revenus sont les plus fortes. Une fois identifiés, ces groupes peuvent être soumis à des mesures redistributives adaptées à leur situation économique, à la demande du décideur politique. Pour notre étude, nous nous focalisons sur un critère de partitionnement qui alimente régulièrement les débats lorsqu'il est question d'inégalité de revenus : le critère du sexe des individus.

20. Cela inclut également les retraites et pensions de retraites, les bourses d'études ou de recherche, les revenus de type RSO (revenu de solidarité spécifique), RMA (revenu minimum d'activité), *etc.*

L'histoire de la France, tout comme celle de nombreux autres pays est marquée par l'évolution de la place des femmes au sein de la société. A partir de 1789 se développe en France un mouvement progressif d'émancipation des femmes visant à établir la parité entre les sexes. Les premières femmes à faire parler d'elles portent les noms [21] de Clémence Royer (1884, première femme à obtenir le droit d'enseigner à la Sorbonne), Jeanne Chauvin (1900, première avocate), sans oublier Marie Curie (1903, première femme à recevoir le prix Nobel de physique puis le prix Nobel de chimie en 1906, elle se voit également attribuer une chaire à la Sorbonne) ou Marguerite Yourcenar (1980, première femme à l'académie française). Diverses lois sont promulguées afin d'officialiser et d'encourager l'entrée des femmes sur le marché du travail. A compter de 1946, les droits des femmes sont déclarés identiques à ceux des hommes par la Constitution française. En 1972, une première loi [22] institue l'égalité des salaires entre les hommes et les femmes effectuant des travaux similaires. De cette loi découle le principe aujourd'hui bien connu « à travail égal, salaire égal ». La loi Roudy [23] introduite en 1983 interdit toute distinction professionnelle basée sur le critère du sexe. Elle est ensuite remise au goût du jour à travers la loi Genisson [24] en 2001. L'ensemble de ces lois ne cesse d'être actualisé et complété afin de tendre, un peu plus, chaque jour, vers la parité des sexes.

En 2005, les femmes semblent bien installées sur le marché du travail. Les efforts fournis par les entreprises dans la féminisation de leur personnel se voient récompensés. Le groupe PSA-Peugeot-Citroën reçoit le label *Egalité profes-*

21. Source.
22. Loi n°72-1143 du 22 décembre 1972 publiée dans le Journal officiel français (JOFR) le 24/12/1972.
23. Loi n°83-635 du 13 juillet 1983 dite « loi Roudy ». Nous pouvons également mentionner la loi n° 83-634 édictée le même jour dite « loi Le Pors » qui est axée sur la valorisation de la place des femmes dans la fonction publique.
24. Loi n°2001-397 du 9 mai 2001.

sionnelle créé par la ministre de la parité et de l'égalité professionnelle de l'époque : Nicole Ameline. En dépit de ces avancées encourageantes, les inégalités de revenus entre les sexes persistent comme le révèle la présente étude.

Notre échantillon de 14 281 individus comprend un effectif de 7 122 femmes dont le revenu annuel moyen est de 14 347€ et 7 159 hommes qui possèdent un revenu annuel moyen de 21 526, 03€. Ces premiers indicateurs statistiques sont révélateurs de la présence de disparités de revenus entre nos deux groupes. Afin d'affiner notre analyse et de préciser la nature de ces inégalités, nous employons l'indice de Gini standard. Au sein de notre échantillon, 48,37% des inégalités sont de nature intragroupe. Ces inégalités sont dues à des écarts de revenus observés entre les hommes d'une part et entre les femmes d'autre part. Les inégalités entre les hommes et les femmes (dites intergroupes) représentent donc 51,63% des inégalités totales, quelle que soit la valeur de β.

Car si les femmes sont de plus en plus nombreuses à prendre part à la vie active au fil des siècles, elles ne visent pas toutes le même plan de carrière. Des écarts de revenus sont ainsi constatés à la fois au sein même du groupe des femmes et au sein du groupe des hommes. La contribution des inégalités évaluée dans le groupe des hommes reste néanmoins supérieure à celle des inégalités notée dans le groupe des femmes. Les écarts de revenus constatés dans le groupe des femmes représentent 19,80% des disparités totales, contre 28,57% pour le groupe des hommes. Des mesures redistributives telles que celles suggérées par Pigou et Dalton peuvent être mises en place afin de réduire ces disparités. L'application de telles actions redistributives s'inscrit dans la continuité du contexte socioéconomique actuel visant à établir une mixité ainsi qu'une égalité professionnelle entre les hommes et les femmes, selon les termes de l'*accord national interprofessionnel*[25] signé entre le patronat et les syndicats en 2004.

25. Accord publié dans le bulletin officiel des conventions collectives, n°04/18 du

Les disparités de revenus présentes dans notre échantillon ne sont pas uniquement de nature intragroupe, comme cela a pu être mentionné précédemment. Le critère du sexe semble, encore en 2005, être un critère déterminant en ce qui concerne les inégalités de revenus. Pour mieux comprendre ces inégalités entre les hommes et les femmes, qui représentent plus de la moitié des inégalités totales, nous nous sommes intéressés aux composantes d'inégalité intergroupe nette et de transvariation. La composante d'inégalité intergroupe nette capture les écarts observés entre les plus hauts revenus des hommes et les plus faibles revenus des femmes, tels que la moyenne de leurs revenus est inférieure à celle des revenus hommes (au vu des statistiques descriptives, *cf.* Tableau 1.5 en Annexes). La composante de transvariation mesure les écarts entre les hauts revenus des femmes et les revenus de valeurs inférieures appartenant à des hommes. Si la tendance générale met en avant des écarts de revenus entre les sexes principalement générés par des hauts salaires touchés majoritairement par des hommes, cela n'exclut pas le fait qu'en 2005 certaines femmes bénéficient de salaires plus élevés que ceux de certains hommes. Ce phénomène constitue ce que Gini (1916) qualifie de phénomène de *transvariation*.

Les termes G_{nb} et G_t dépendent de la sensibilité du décideur aux non-chevauchements (β). En premier lieu, le paramètre β agit sur l'indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle. Cet indicateur, défini comme un indicateur de non-chevauchement, est particulièrement sensible aux écarts de revenus observés entre les plus hauts revenus des hommes et les plus faibles revenus des femmes. Plus la valeur de β est proche de 4, plus le décideur politique accorde de l'attention à ces écarts. On constate, en effet, que pour un décideur politique dont la sensibilité $\beta = 1$, la distance entre les distributions de revenus des hommes et des femmes semble modérée. Rappelons que $D_{kh}(\beta)$ est compris

29/5/2004, pp. 51-61. Lien : http://www4.centre-inffo.fr/v2/cpnfp/NT328678.phtml.

dans l'intervalle [0 ;1], pour tout β. Une distance de 0,4956 se situe au milieu de cet intervalle. En d'autres termes, le décideur considère que la distance entre la distribution des femmes et celle des hommes se situe dans la moyenne. La zone sur laquelle les deux distributions de revenus se chevauchent est aussi étendue que celle sur laquelle elles ne chevauchent pas. Compte tenu de la structure des composantes, nous évaluons la contribution des inégalités intergroupes nettes à hauteur de 26% des inégalités totales. La contribution de la composante de transvariation étant de même valeur (soit $(G_{gb}/G_T) \cdot 1/2 = 52\%/2 = 26\%$, voir Tableau 1.1).

Cette distance entre les distributions de revenus s'accroît au fur et à mesure que β augmente. L'accent est alors mis sur les disparités intergroupes nettes. La distance économique $\beta-$directionnelle évolue d'une valeur de 0,7957 pour $\beta = 2$, à 0,9744 pour $\beta = 4$. Cette valeur tend vers la limite supérieure de l'indicateur : 1. Le décideur perçoit désormais les distributions de revenus sous un autre angle. Tout se passe comme si les zones de chevauchements n'existaient quasiment plus. Le planificateur focalise toute son attention sur les disparités intergroupes nettes dont la contribution passe de 26% pour $\beta = 1$, à 50% lorsque $\beta = 4$. Il serait donc plus enclin à opérer des transferts de revenus entre hommes et femmes. Par complémentarité, la contribution de la composante de transvariation est ramenée à 2%.

	$\boldsymbol{\beta = 1}$	$\boldsymbol{\beta = 2}$	$\boldsymbol{\beta = 3}$	$\boldsymbol{\beta = 4}$
$D_{kh}(\beta)$	0,4956	0,7957	0,9261	0,9744
G_{nb}/G_T	26%	41%	48%	50%
G_t/G_T	26%	11%	4%	2%

Tableau 1.1 – **Contributions de la composante intergroupe nette et de transvariation, $\forall \boldsymbol{\beta} \in \{\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{4}\}$.**

Les inégalités intergroupes nettes sont précisément celles contre lesquelles le gouvernement essaye de lutter depuis plusieurs années. Le fait est que, même, si les femmes sont de mieux en mieux représentées sur le marché du travail, elles occupent le plus souvent des emplois à temps partiel ou dont le niveau de qualification requis pour l'exercer n'est pas très élevé. Les récentes études menées par l'OCDE[26] révèlent que sur l'ensemble de la population française en 2005, plus de 22% des femmes exercent leur profession à temps partiel,[27] alors que seuls 5% des hommes sont concernés par une telle situation professionnelle. Ce constat n'est cependant pas imputable à des différences effectives de qualification entre les sexes. D'après les statistiques de l'OCDE, le nombre de femmes à poursuivre des études universitaires et à obtenir un diplôme tend à dépasser celui des hommes. L'exercice d'une profession à temps partiel résulte parfois d'un choix personnel. En 2005 en France, le poucentage d'hommes employés à temps partiel par défaut est de 1% contre 6% pour les femmes, ce qui reste un pourcentage relativement faible. Les écarts de revenus entre les sexes découlent donc d'un choix de vie manifesté par les femmes qui vont privilégier leur vie de famille à leur carrière professionnelle. La nomination de femmes à des postes à hautes responsabilités est parfois freinée par des réticences encore présentes dans certaines mentalités de la population française (surtout chez les « anciens[28] »), malgré une nette évolution depuis les années 70.

La France est loin d'être l'un des pays les plus inégalitaires en matière d'écart de revenus hommes/femmes. Rappelons que l'indicateur de Gini standard obtenu pour notre échantillon est de 0,3909, ce qui reste une valeur correcte pour un indicateur compris entre 0 et 1. Conformément aux propriétés normatives de l'indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle exposées précédemment, le décideur politique dispose de moyens d'action pour réduire les disparités.

26. Organisation de coopération et de développement économiques.

27. La notion de '*profession à temps partiel*' est définie par l'OCDE comme la profession principale exercée par un individu, telle qu'il effectue moins de 30 heures par semaine.

28. *Cf.* Enquête de l'Insee : Couple, famille, parentalité, travail des femmes.

La majorité des inégalités étant observées au sein du groupe des hommes, des transferts progressifs entre les hauts revenus des hommes et les revenus les plus faibles des femmes peuvent notamment être envisagés ; au même titre que des transferts au sein même du groupe des hommes ou de celui des femmes.

Nous pouvons, par ailleurs, regretter de ne pouvoir enrichir notre analyse d'un paramètre de sensibilité plus général que β. S'il est intéressant de pouvoir capter les préférences du décideur pour les inégalités intergroupes nettes, cela l'est, d'autant plus, de pouvoir ajuster la mesure de l'inégalité en fonction du degré d'aversion global. Cette notion d'aversion globale est introduite à la Section 1.3.1 sous la notation α. Elle donne notamment lieu à la définition d'une nouvelle famille d'indicateurs d'inégalité récemment introduite dans la littérature : la famille des α−Gini. De la même façon, une étude basée sur un seul et unique critère de partitionnement peut sembler un peu restrictive. Une étude sur plusieurs critères de partitionnement permettrait notamment de mieux comprendre pourquoi les disparités de revenus entre les sexes sont toujours significatives en France en 2005. La multiplicité des critères de partitionnement donne en effet la possibilité de cibler avec une plus grande précision les acteurs principaux des disparités.[29] Une telle opération nécessite cependant certains prérequis qui font l'objet du paragraphe suivant.

29. Il est aussi possible de régresser le revenu sur des variables exogènes afin de fournir davantage d'explications sur les inégalités intra- et intergroupes.

1.3 L'(α, β)–décomposition du $\alpha-$Gini en multi-niveaux

Cette Section présente les caractéristiques d'une famille d'indicateurs d'inégalité récemment introduite dans la littérature par Chameni Nembua (2006, 2011, 2013) et Ebert (2010). La structure de ces mesures est construite à partir de celle de l'indice de Gini rappelée au paragraphe précédent. Pour cette raison, nous qualifions ces mesures de $\alpha-$Gini. Le paramètre α représente le degré de sensibilité aux inégalités d'un décideur politique. L'introduction d'un tel paramètre permet, notamment, de retrouver l'expression de l'indice de Gini standard ainsi que celle d'autres indicateurs selon la valeur empruntée par α, comme nous le précisons au cours de ce paragraphe.

Après avoir exposé la formulation générale du $\alpha-$Gini, nous nous intéressons à ses propriétés statistiques et normatives. Nous montrons que la prise en considération d'un paramètre d'aversion pour l'inégalité permet d'envisager des mesures redistributives plus complètes que celles auquel l'indice de Gini peut prétendre. La famille des $\alpha-$Gini hérite par ailleurs de la propriété de décomposabilité en sous-groupes du Gini. En faisant appel à l'indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle présenté au paragraphe précédent, nous montrons que ces indicateurs sont cohérents avec un cas particulier de décomposition en sous-groupes qui s'effectue sur plusieurs niveaux de partitions. Le principe de décomposition reste inchangé, la seule différence tient au redécoupage de chaque sous-groupe selon d'autres critères de partionnement, dans le but d'affiner l'analyse. Du fait de la présence de paramètres de sensibilité (α et β) dans la formulation des diverses composantes, nous qualifions cette méthode d'$(\alpha, \beta)-$décomposition en multi-niveaux. Pour clore notre exposé, nous réalisons une nouvelle illustration à partir de l'enquête « Budget des familles

2005-2006 » dans le but de compléter les résultats précédemment obtenus dans le cadre de la décomposition du Gini, sur un seul niveau de partition. Les inégalités de revenus en France ne sont plus seulement étudiées en fonction du sexe des individus, mais également en fonction de leur âge. Leur appréciation est de plus conditionnée par le degré de sensibilité à l'inégalité α du décideur, que nous faisons varier.

1.3.1 Les propriétés normatives du $\alpha-$Gini

A partir des années 2000, s'affiche la volonté d'axiomatiser le concept de comparaisons interpersonnelles de revenus capté par des indicateurs tels que l'indice de Gini standard et notamment présent dans les travaux de Rao (1969), Pyatt (1976), Mookherjee et Shorrocks (1982), Dagum (1997), Chameni Nembua (2006b, 2008, 2011, 2013) ou encore Mussard et Terraza (2009). Cette axiomatisation est finalement fournie par Ebert (2010) sous le nom de décomposition faible. Dans le cas d'une population $\mathscr{P}$ subdivisée en deux sous-groupes notés respectivement 1 et 2 tels que, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x}^g = (x_1^g, \ldots, x_{n_g}^g)$ pour tout $g \in \{1; 2\}$, la décomposition faible peut-s'exprimer comme suit.

Axiome 1.3.1 –Décomposition faible, [Ebert (2010)]–(D$\hat{E}$C). *Pour tout $\mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ et $\mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, il existe des fonctions de pondérations à valeurs réelles strictement positives $\gamma^1(\boldsymbol{n})$, $\gamma^2(\boldsymbol{n})$ et $\beta(\boldsymbol{n})$ telles que :*

$$I(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, n_1 + n_2) = \gamma^1(\boldsymbol{n}) \frac{\mu(\mathbf{x}^1)^\alpha}{\mu(\mathbf{x})^\alpha} I(\mathbf{x}^1, n_1) + \gamma^2(\boldsymbol{n}) \frac{\mu(\mathbf{x}^2)^\alpha}{\mu(\mathbf{x})^\alpha} I(\mathbf{x}^2, n_2) + \beta(\boldsymbol{n}) \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\mu(x_i^1, x_j^2)^\alpha}{\mu(\mathbf{x})^\alpha} I(x_i^1, x_j^2, 2), \tag{D$\hat{E}$C}$$

avec $\mu(x_i^1, x_j^2) := \frac{x_i^1+x_j^2}{2}$ *la moyenne entre le revenu de l'individu i localisé dans le groupe* 1 *et celui de l'individu j localisé dans le groupe* 2*. Le paramètre* α *représente le degré d'aversion pour l'inégalité d'un décideur* ($\alpha \in \mathbb{R}_+$)*.*

Cet axiome est plus particulièrement destiné aux mesures relatives dont l'expression dépend de la moyenne de revenu globale. Les travaux d'Ebert basés sur cette propriété mettent, en avant, une nouvelle famille d'indicateurs d'inégalité : la famille des $\alpha-$Gini.

$$G^{\alpha}(\mathbf{x}, n) := \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} |x_i - x_r|^{\alpha}}{2n^2(\mathbf{x})\mu^{\alpha}(\mathbf{x})} \ ; \qquad (\alpha-\text{Gini})$$

tel que $G^{\alpha}(\mathbf{x}, n) \in \mathbb{R}_+$ lorsque $\alpha > 1$, tandis que $G^1(\mathbf{x}, n) \in [0; 1]$ si et seulement si $\alpha = 1$.

L'un des points forts de cette famille de mesures est qu'elle contient des indicateurs bien connus de la littérature des inégalités. L'indice de Gini (obtenu pour $\alpha = 1$), ainsi que le coefficient de variation élevé au carré ($\alpha = 2$) font en effet partie des mesures $\alpha-$Gini. Dans notre approche, nous considérons que les préférences du décideur politique en matière de redistribution sont capturées par le paramètre α. Afin de rendre explicite la relation entre α et la notion d'aversion pour l'inégalité, nous étudions les répercussions des transformations de revenus sur le $\alpha-$Gini, en commençant par les valeurs remarquables que α peut emprunter.

Lorsque $\alpha = 1$, les propriétés normatives de l'indice $1-$Gini ne font aucun doute. Cet indicateur correspond en effet à l'indice de Gini standard dont la dimension normative est largement exploitée dans la littérature. Nous savons par exemple, que les inégalités mesurées par l'indice de Gini standard diminuent suite à la mise en place d'un transfert progressif de type Pigou-Dalton.

Axiome 1.3.2 – Principe de transferts de Pigou-Dalton – (PD).
Soit une distribution $\mathbf{x}$ *rangée par ordre non-décroissant, un transfert (progressif) de Pigou-Dalton d'un montant* $\delta > 0$*, réalisé entre un individu* j *et un individu* i *satisfait les trois conditions suivantes :*

$$x_i < x_j \ ; \tag{PDa}$$

$$x_i + \delta \leqslant x_{i+1} \ ; \tag{PDb}$$

$$x_{j-1} \leqslant x_j - \delta. \tag{PDc}$$

Le principe de transferts de Pigou-Dalton est strictement respecté si :

$$I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_i^n - \mathbb{1}_j^n)\delta, n\right) < I\left(\mathbf{x}, n\right) \ . \tag{PD}$$

La structure mathématique de base commune aux différents indices $\alpha-$Gini nous permet d'élargir l'application de ce principe à l'ensemble des mesures qui appartiennent à cette famille d'indicateurs.

Proposition 1.3.1 *Le* $\alpha-$*Gini satisfait strictement le principe de transfert de Pigou-Dalton* (PD) *lorsque* $\alpha \geqslant 1$.

Preuve.
Se reporter aux démonstrations proposées par Ebert (2010) et Chameni Nembua (2011, 2013). □

Les auteurs démontrent que la variation des indicateurs de type $\alpha-$Gini est strictement négative, dès lors que $\alpha \geqslant 1$. Cela signifie qu'un tel transfert ne peut avoir d'autre effet que de diminuer les inégalités de revenus constatées sur la population initiale. Il peut sembler restrictif de n'inclure que deux individus dans la relation de transfert. Cette action redistributive peut, néanmoins, être répétée plusieurs fois sur une même distribution de revenus afin de cibler différents couples d'individus et augmenter la portée de l'action de redistribution.

Toutefois, rien ne garantit l'efficacité d'une telle politique. La répétition de cette procédure un trop grand nombre de fois peut entraîner un effet contraire à celui escompté et être à l'origine d'une hausse des disparités. En 1976, Kolm met en avant le fait que des transferts progressifs (”*rich-to-poor*”) peuvent être couplés à des transferts régressifs (” *poor-to-rich*”), dans le but de spécifier plus précisément le degré d'aversion pour l'inégalité inclus dans la structure d'un indicateur.

Supposons que deux transferts alternatifs progressifs de type Pigou-Dalton soient mis en place, tels que les écarts entre les revenus des receveurs et ceux des donneurs sont les mêmes (*c.-à-d.*, que les individus concernés par la relation de transfert sont équidistants en termes de revenus). D'après le principe des transferts décroissants (DT) proposé par Kolm, un transfert progressif a un effet réducteur plus fort sur les inégalités lorsqu'il s'opère entre les revenus les plus faibles.

Axiome 1.3.3 – Principe des transferts décroissants [30] **– (DT)**
Soit une distribution $\mathbf{x}$ *rangée par ordre non-décroissant. Les transferts progressifs d'un montant* $\delta > 0$ *entre les individus* i *et* j *d'une part, et entre les individus* k *et* ℓ *d'autre part, tels que* $x_i < x_j$ *et* $x_k < x_\ell$ *avec* $x_i < x_k$ *satisfont les conditions suivantes :*

$$x_i + \delta \leqslant x_{i+1} \ ; \ x_{j-1} \leqslant x_j - \delta \tag{DTa}$$

$$x_k + \delta \leqslant x_{k+1} \ ; \ x_{\ell-1} \leqslant x_\ell - \delta \tag{DTb}$$

$$x_j - x_i = x_\ell - x_k =: \varepsilon. \tag{DTc}$$

30. Il s'agit de la traduction littérale proposée par Trannoy (1999) pour ”*principle of diminishing transfer*” [Kolm (1976a,b)]. Il existe différentes variantes pour la formulation de ce principe de transferts. La formulation exposée ici est tirée de Chateauneuf et al. (2002). Les conditions (DTa) et (DTb) ne font cependant pas partie des conditions de base énoncées par Kolm (1976b) pour ce principe.

Le principe des transferts décroissants est strictement respecté si :

$$I\left(\mathbf{x}+(\mathbb{1}_i^n-\mathbb{1}_j^n)\delta,n\right)<I\left(\mathbf{x}+(\mathbb{1}_k^n-\mathbb{1}_\ell^n)\delta,n\right). \tag{DT}$$

Ce principe ne peut s'appliquer que dans un cadre *utilitariste*. La structure du $\alpha-$Gini regroupe au sein d'une même famille des mesures additivement séparables (telles que la variance ou le coefficient de variation élevé au carré) et des mesures faiblement décomposables (parmi lesquelles figure l'indice de Gini standard). Il est donc difficile de spécifier le cadre auquel un tel indicateur se rapporte. Pour analyser le comportement du $\alpha-$Gini face à des transferts décroissants au sens de Kolm, nous recourons à un exemple numérique simple.

Nous considérons une distribution de revenus $\mathbf{x}$ constituée de 5 individus notés i, j, k, ℓ et m. Nous définissons ensuite deux autres distributions de revenus $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$. La distribution $\mathbf{z}$ est formée à partir de $\mathbf{x}$ par application d'un transfert progressif d'un montant $\delta>0$ qui s'opère entre l'individu j (donneur) et l'individu i (receveur). La distribution $\mathbf{y}$ est également formée à partir de $\mathbf{x}$ par application d'un transfert progressif d'un même montant, mais cette fois ce transfert concerne l'individu m (donneur) et l'individu ℓ (receveur). Conformément au principe de Kolm, les écarts entre les revenus des individus i, j, ℓ et m sont identiques sur $\mathbf{x}$.

Supposons par exemple que $\mathbf{x}=(0,3,5,7,12)$. Auquel cas, $\mathbf{z}=(1,3,4,7,12)$ et $\mathbf{y}=(0,3,5,8,11)$ sont dérivées à partir de $\mathbf{x}$ en appliquant un transfert progressif d'un montant $\delta=1>0$. Ce transfert s'opère d'abord entre les revenus du premier et du troisième individu de la distribution, puis entre les individus situés en quatrième et cinquième position. Afin de déterminer plus aisément l'impact de ces transferts sur les inégalités de revenus, nous considérons l'indice $I^\alpha(\mathbf{y}):=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j|y_i-y_j|^\alpha=n^2\mu(\mathbf{y})^\alpha G^\alpha(\mathbf{y})$. Cet indice offre des classements équivalents à ceux que nous aurions obtenus avec l'indicateur $G^\alpha(\mathbf{y})$, pour des distributions de tailles et de moyennes égales. Or : $n(\mathbf{z}) = 5 = n(\mathbf{y})$ et $\mu(\mathbf{z}) = 27/5 = \mu(\mathbf{y})$. Le principe des transferts décroissants de Kolm postule que l'inégalité mesurée sur $\mathbf{z}$ est moins importante que celle mesurée sur $\mathbf{y}$. Nous devons donc comparer la valeur des indicateurs sur chacune de ces deux distributions. Tout d'abord, nous calculons les différences de revenus en valeur absolue :

$$[|z_i - z_j|] = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{12} \\ \mathbf{1} & 0 & 2 & 3 & 6 & 11 \\ \mathbf{3} & 2 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ \mathbf{4} & 3 & 1 & 0 & 3 & 8 \\ \mathbf{7} & 6 & 4 & 3 & 0 & 5 \\ \mathbf{12} & 11 & 9 & 8 & 5 & 0 \end{array} \quad ; \quad [|y_i - y_j|] = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & 0 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ \mathbf{3} & 3 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ \mathbf{5} & 5 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ \mathbf{8} & 8 & 5 & 3 & 0 & 3 \\ \mathbf{11} & 11 & 8 & 6 & 3 & 0 \end{array} .$$

Ces calculs préliminaires nous permettent de déterminer plus facilement les valeurs des indices qui se rapportent à ces deux distributions :

$$\begin{aligned} I^\alpha(\mathbf{z}) - I^\alpha(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\sum_i\sum_j |z_i - z_j|^\alpha - \frac{1}{2}\sum_i\sum_j |y_i - y_j|^\alpha \\ &= 2 \cdot 3^\alpha + 1^\alpha + 4^\alpha + 9^\alpha + 8^\alpha + 5^\alpha - (3 \cdot 3^\alpha + 2 \cdot 5^\alpha + 2 \cdot 8^\alpha) \\ &= (1^\alpha - 3^\alpha) + (4^\alpha - 5^\alpha) + (9^\alpha - 8^\alpha) . \end{aligned}$$

Le comportement de l'indicateur est fonction de la valeur du paramètre α. La valeur $\alpha = 1$ est à proscrire de notre exemple, l'indice de Gini (ou la différence moyenne de Gini (GMD)) étant une mesure dépendant du rang. Nous savons en effet par définition que la structure du Gini n'est pas compatible avec le principe de Kolm. Nous nous intéressons donc directement au cas $\alpha = 2$. Soit : $I^2(\mathbf{z}) - I^2(\mathbf{y}) = -8 - 9 + 17 = 0$. L'application de deux transferts progressifs ne permet pas d'atténuer les inégalités entre les distributions $\mathbf{z}$ et $\mathbf{y}$, lorsque $\alpha = 2$. Nous réitérons l'opération en considérant désormais $\alpha = 3$. Il vient

$I^3(\mathbf{z}) - I^3(\mathbf{y}) = -26 - 61 + 217 = +130 > 0$. La variation est positive, autrement dit, les transferts n'ont aucun effet réducteur sur les disparités. Au contraire, après transferts les inégalités sont plus importantes sur la distribution $\mathbf{z}$ que sur la distribution $\mathbf{y}$. Le principe des transferts décroissants n'est pas adapté au $3-$Gini. De la même façon lorsque nous envisageons $\alpha = 4$, nous trouvons $I^4(\mathbf{z}) - I^4(\mathbf{y}) = +2016 > 0$. La variation est une nouvelle fois positive. Nous retrouvons ce résultat quelle que soit la valeur de $\alpha > 1$ que nous testons. Les transferts décroissants ne permettent pas de réduire les inégalités entre les distributions $\mathbf{z}$ et $\mathbf{y}$, telles que nous les avons définies.

Les valeurs choisies pour les revenus des individus i, j, k ℓ et m conditionnent les résultats mis en avant au cours de notre exemple. Elles suffisent néanmoins à affirmer que le $\alpha-$Gini n'est pas compatible avec le principe de transferts de Kolm.

Proposition 1.3.2 *Le $\alpha-$Gini ne respecte pas le principe des transferts décroissants de Kolm, pour tout $\alpha \geqslant 1$.*

La puissance α affectée aux différences binaires absolues tend à amplifier les écarts de revenus calculés entre les individus. Selon leur positionnement dans la distribution, la modification de leur revenu imposée par le transfert conduit à une augmentation des disparités. Le fait d'imposer un écart de revenu fixe entre les individus impliqués dans la relation de transferts n'est donc pas une condition suffisante pour permettre au décideur politique d'influer sur les inégalités. Une solution alternative est d'imposer non plus une condition sur les écarts entre les revenus des individus mais entre leurs rangs comme le suggère Mehran (1976) dans son principe de sensitivité des transferts positionnels (ST). Le rang d'un individu i au sein d'une distribution $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ est noté r_i.

Axiome 1.3.4 – **Principe de sensitivité des transferts positionnels – (ST)**
Soit une distribution $\mathbf{x}$ *rangée par ordre non-décroissant. Les transferts progressifs d'un montant* $\delta > 0$ *entre les individus* i *et* j *d'une part, et entre les individus* k *et* ℓ *d'autre part, tels que* $x_i < x_j$ *et* $x_k < x_\ell$ *avec* $x_i < x_k$ *satisfont les conditions suivantes :*

$$x_i + \delta \leqslant x_{i+1} \ ; \ x_{j-1} \leqslant x_j - \delta \tag{STa}$$

$$x_k + \delta \leqslant x_{k+1} \ ; \ x_{\ell-1} \leqslant x_\ell - \delta \tag{STb}$$

$$r_j - r_i = r_\ell - r_k =: \gamma. \tag{STc}$$

Le principe de sensitivité des transferts positionnels est strictement respecté si :

$$I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_i^n - \mathbb{1}_j^n)\delta, n\right) < I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_k^n - \mathbb{1}_\ell^n)\delta, n\right). \tag{ST}$$

Ce principe réservé aux mesures *dépendant du rang* aboutit à la même conclusion que celui de Kolm.

Reprenons notre exemple précédent, en lui apportant les modifications nécessaires afin qu'il réponde aux exigences du principe de transferts proposé par Mehran. Nous considérons toujours une distribution de revenus $\mathbf{x}$ contenant les revenus des cinq individus i, j, k, ℓ et m. Les distributions $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ sont formées à partir de la distribution $\mathbf{x}$ à la suite de l'application de deux transferts progressifs d'une valeur $\delta > 0$. Ces transferts concernent d'une part les individus k (donneur) et j (receveur) et les individus m (donneur) et ℓ (receveur) d'autre part. Les écarts entre les rangs de ces quatre individus (donneur/receveur) sont identiques et ne sont pas altérés par les transferts.

Soit $\mathbf{x} = (0, 3, 5, 7, 12)$. Nous fixons $\delta = 1 > 0$, de manière à former les deux distributions suivantes : $\mathbf{z} = (0, 4, 4, 7, 12)$ et $\mathbf{y} = (0, 3, 5, 8, 11)$. Les transferts progressifs s'opèrent entre le deuxième et le troisième individu de la distribution $\mathbf{x}$ afin d'obtenir $\mathbf{z}$ et entre le quatrième et le cinquième individu de la distribution $\mathbf{x}$ pour donner $\mathbf{y}$. Ces deux distributions étant toujours de même moyenne et de même taille, nous utilisons les expressions des indices $I^\alpha(\mathbf{z})$ et $I^\alpha(\mathbf{y})$ antérieurement définies, pour nos calculs.

$$[|z_i - z_j|] = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{12} \\ \mathbf{0} & 0 & 4 & 4 & 7 & 12 \\ \mathbf{4} & 4 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ \mathbf{4} & 4 & 0 & 0 & 3 & 8 \\ \mathbf{7} & 7 & 3 & 3 & 0 & 5 \\ \mathbf{12} & 12 & 8 & 8 & 5 & 0 \end{array} \quad ; \quad [|y_i - y_j|] = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{8} & \mathbf{11} \\ \mathbf{0} & 0 & 3 & 5 & 8 & 11 \\ \mathbf{3} & 3 & 0 & 2 & 5 & 8 \\ \mathbf{5} & 5 & 2 & 0 & 3 & 6 \\ \mathbf{8} & 8 & 5 & 3 & 0 & 3 \\ \mathbf{11} & 11 & 8 & 6 & 3 & 0 \end{array} .$$

Les indices calculés sur ces deux distributions sont :

$$\begin{aligned} I^\alpha(\mathbf{z}) - I^\alpha(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\sum_i\sum_j |z_i - z_j|^\alpha - \frac{1}{2}\sum_i\sum_j |y_i - y_j|^\alpha \\ &= 2 \cdot 4^\alpha + 7^\alpha + 2 \cdot 3^\alpha + 12^\alpha + 5^\alpha - (3 \cdot 3^\alpha + 2 \cdot 5^\alpha + 2^\alpha + 11^\alpha + 6^\alpha) \\ &= (4^\alpha - 3^\alpha) + (7^\alpha - 5^\alpha) + (12^\alpha - 11^\alpha) + (4^\alpha - 2^\alpha) - 6^\alpha. \end{aligned}$$

Nous nous basons sur cette dernière expression pour juger de l'impact des transferts de Mehran sur l'indicateur α–Gini. Plusieurs valeurs de α sont envisagées, à commencer par la valeur $\alpha = 1$. Nous obtenons alors : $I^1(\mathbf{z}) - I^1(\mathbf{y}) = 6 - 6 = 0$. Après transferts, l'ampleur des inégalités est la même sur les deux distributions. Les transferts n'ont aucun effet sur l'indicateur lorsque $\alpha = 1$. Nous excluons la valeur $\alpha = 2$ de notre analyse. Pour rappel, une telle valeur de α peut conduire à des indicateurs tels que le coefficient de variation élevé au carré, qui sous certaines conditions, est également assimilé à une mesure additivement séparable. Nous nous intéressons donc directement au cas où $\alpha = 3$. Nous obtenons que : $I^3(\mathbf{z}) - I^3(\mathbf{y}) = +492 > 0$. La variation est positive. Le transfert progressif appliqué entre les individus dont les revenus sont parmi les moins élevés est moins efficace que celui appliqué sur les hauts revenus. Nous faisons le même constat lorsque nous considérons $\alpha = 4$ puisque $I^4(\mathbf{z}) - I^4(\mathbf{y}) = +6990 > 0$. Les transferts positionnels au sens de Mehran ont un effet contraire à celui attendu pour l'indicateur d'inégalité. Ils tendent à accroître les disparités entre les deux distributions de revenus et ne peuvent être retenus pour l'indicateur $\alpha-$Gini.

Proposition 1.3.3 *Le $\alpha-$Gini ne respecte pas le principe de sensitivité des transferts positionnels de Mehran, quelle que soit la valeur de $\alpha \geqslant 1$.*

Le principe de Kolm, comme celui de Mehran, présente des limites mises en avant par Chateauneuf *et al.* (2002). Il semble, en effet, que la prise en compte des rangs des individus indépendamment des écarts de revenus entre les donneurs et les receveurs (et inversement) conduise à une configuration des transferts qui n'est pas optimale. En particulier, dans le cas de mesures additivement séparables, les auteurs montrent au travers d'un exemple que des transferts en faveur des riches (et donc au détriment des plus pauvres) peuvent être mis en place lorsque les rangs sont négligés. Le gain en termes de revenus précède celui en termes de bien-être. Aucun de ces deux principes n'étant satisfait par le $\alpha-$Gini, nous envisageons une mesure redistributive plus restrictive. Nous faisons appel au principe fort des transferts décroissants (SDT) suggéré par Chateauneuf *et al.* (2002). Ce principe réunit les conditions sur les écarts entre les revenus et les rangs des donneurs et receveurs. Il permet, ainsi, de pallier les limites des principes évoqués précédemment. Le fait de réunir ces deux conditions permet de plus d'élargir la classe de mesures compatibles avec un principe de redistribution. Parmi les familles de mesures satisfaisant le principe fort des transferts décroissants figurent aussi bien des mesures cohérentes avec le modèle de Von Neumann-Morgenstern que des mesures correspondant au modèle de Yaari (1987), ou encore à celui de Quiggin (1982).

Axiome 1.3.5 – Principe fort des transferts décroissants – (SDT). *Soit une distribution* $\mathbf{x}$ *rangée par ordre non-décroissant. Les transferts progressifs d'un montant* $\delta > 0$ *entre les individus* i *et* j *d'une part, et entre les individus* k *et* ℓ *d'autre part, tels que* $x_i < x_j$ *et* $x_k < x_\ell$ *avec* $x_i < x_k$ *satisfont les conditions suivantes :*

$$x_i + \delta \leqslant x_{i+1} \ ; \ x_{j-1} \leqslant x_j - \delta \ ; \tag{SDTa}$$

$$x_k + \delta \leqslant x_{k+1} \ ; \ x_{\ell-1} \leqslant x_\ell - \delta \ ; \tag{SDTb}$$

$$r_j - r_i = r_\ell - r_k =: \gamma \ ; \tag{SDTc}$$

$$x_j - x_i = x_\ell - x_k =: \varepsilon. \tag{SDTd}$$

Le principe fort des transferts décroissants est strictement respecté si :

$$I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_i^n - \mathbb{1}_j^n)\delta, n\right) < I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_k^n - \mathbb{1}_\ell^n)\delta, n\right) \ . \tag{SDT}$$

Afin de pouvoir appliquer ce principe de transferts, nous devons définir avec exactitude l'emplacement des transferts progressifs sur la distribution de revenus. Le α–Gini est en effet sensible à la position des transferts progressifs appliqués à la distribution de revenus. Pour certaines valeurs de α, il est nécessaire de connaître non seulement la position relative des individus concernés par la relation de transferts, mais aussi leur localisation dans la distribution globale, afin de pouvoir évaluer les effets de ces transferts. Avant de présenter formellement les conditions d'application du principe fort des transferts décroissants, nous illustrons la sensibilité de l'indice α–Gini au travers d'un dernier exemple.

Nous travaillons toujours avec une distribution $\mathbf{x}$ de 5 individus i, j, k, ℓ et m. La particularité dans cette nouvelle configuration est que les transferts se concentrent sur les individus i, j, k et ℓ qui se trouvent être les quatre individus les plus pauvres de la distribution. La distribution $\mathbf{z}$ est formée à partir de $\mathbf{x}$ par application d'un transfert progressif d'un montant $\delta > 0$. Ce transfert a lieu entre l'individu j (donneur) et l'individu i (receveur). La distribution $\mathbf{y}$ est également formée à partir de $\mathbf{x}$ par application d'un transfert progressif (d'un même montant) entre l'individu ℓ (donneur) et l'individu k (receveur). Ces deux transferts préservent le rang des individus. De plus, ils concernent tous deux des individus i, j, k et ℓ situés *au bas de leur distribution* de revenus. Les écarts entre leur rang et entre leur revenu constatés sur $\mathbf{x}$ (*c.-à-d.*, avant transferts) sont fixes (et de même valeur).

Soit $\mathbf{x} = (0, 2, 4, 6, 10)$, $\mathbf{z} = (1, 1, 4, 6, 10)$ et $\mathbf{y} = (0, 2, 5, 5, 10)$ avec $\delta = 1 > 0$. Nous envisageons cette fois que les transferts progressifs concernent les deux premiers individus (les plus pauvres) et les individus situés en troisième et quatrième position. Conformément au principe fort des transferts décroissants, l'inégalité mesurée sur $\mathbf{z}$ *devrait être plus faible* que celle mesurée sur $\mathbf{y}$. Pour vérifier un tel résultat nous procédons comme précédemment :

$$[|z_i - z_j|] = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{10} \\ \hline \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & 5 & 9 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & 5 & 9 \\ \mathbf{4} & 3 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ \mathbf{6} & 5 & 5 & 2 & 0 & 4 \\ \mathbf{10} & 9 & 9 & 6 & 4 & 0 \end{array} \quad ; \quad [|y_i - y_j|] = \begin{array}{c|ccccc} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{10} \\ \hline \mathbf{0} & 0 & 2 & 5 & 5 & 10 \\ \mathbf{2} & 2 & 0 & 3 & 3 & 8 \\ \mathbf{5} & 5 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ \mathbf{5} & 5 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ \mathbf{10} & 10 & 8 & 5 & 5 & 0 \end{array} .$$

Les moyennes ainsi que les tailles des deux distributions étant une nouvelle fois identiques, nous comparons les valeurs des indices $I^\alpha(\mathbf{z})$ et $I^\alpha(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} I^\alpha(\mathbf{z}) - I^\alpha(\mathbf{y}) &= \frac{1}{2}\sum_i \sum_j |z_i - z_j|^\alpha - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j |y_i - y_j|^\alpha \\ &= 2 \cdot 9^\alpha + 6^\alpha + 4^\alpha - (2 \cdot 5^\alpha + 10^\alpha + 8^\alpha) \\ &= (9^\alpha - 8^\alpha) + (9^\alpha - 10^\alpha) - (5^\alpha - 4^\alpha) - (5^\alpha - 6^\alpha) . \end{aligned}$$

Notons que, par construction les différences de revenus calculées entre les quatre individus impliqués dans les relations de transferts s'annulent. L'écart entre les indices d'inégalité ne résulte finalement que des différences constatées par rapport à l'individu le plus riche de chaque distribution dont le revenu est de 10.

A présent, envisageons différentes valeurs pour le paramètre α. Si $\alpha = 1$, nous obtenons $I^1(\mathbf{z}) - I^1(\mathbf{y}) = 0$. L'indice est donc insensible à l'application du principe fort des transferts décroissants au bas de la distribution de revenus. De la même façon, si $\alpha = 2$, il vient $I^2(\mathbf{z}) - I^2(\mathbf{y}) = 0$. Nous arrivons à une conclusion analogue : l'indice est, cette fois encore, insensible à l'application du principe de transferts. Ces deux cas sont néanmoins les seuls pour lesquels le principe fort de transferts décroissants est sans effet sur la mesure des inégalités. En effet, lorsque $\alpha = 3$, il apparaît que $I^3(\mathbf{z}) - I^3(\mathbf{y}) = (729 - 512) - (1000 - 729) - (125 - 64) + (216 - 125) = -54 + 30 = -24 < 0$. L'inégalité mesurée sur la distribution $\mathbf{y}$ est donc plus importante que celle mesurée sur la distribution $\mathbf{z}$. Le principe fort des transferts décroissants a, par conséquent, un effet réducteur sur les inégalités lorsqu'il est appliqué au bas de la distribution de revenus. Ce résultat reste, de plus, valable pour tout $\alpha > 2$, comme cela est démontré par la suite. Un résultat opposé est en revanche obtenu dès lors que $\alpha \in]1; 2[$.

L'effet neutre des transferts constaté sur les inégalités lorsque $\alpha \in \{1; 2\}$ est bien connu de la littérature. Comme le souligne Zoli (2002), l'indice de Gini – obtenu quand $\alpha = 1$ – ne fait aucune différence entre les transferts progressifs qui sont appliqués aux revenus d'individus équidistants en terme de rangs dans leur distribution. En ce qui concerne le coefficient de variation élevé au carré (ou encore la variance) – obtenu pour $\alpha = 2$ – nous savons d'après Foster et Shorrocks (1987) que cet indicateur reste inchangé suite à l'application de transferts entre individus équidistants en termes de revenus. Le $\alpha-$Gini est donc sensible aux variations qui touchent les extrémités des distributions de revenus lorsque $\alpha > 2$. Les transferts progressifs ont un impact plus grand quand ils sont appliqués sur les queues de la distribution. Ces aspects ont été illustrés au cours de l'exemple en ciblant la queue inférieure de la distribution. Ils sont également valables pour la queue supérieure de la distribution.

Nous montrons par la suite que, plus les transferts progressifs sont situés dans les queues de distribution, plus l'effet sur les inégalités est important (pour $\alpha > 2$). Afin de parvenir à un tel résultat, il nous faut redéfinir le principe fort des transferts décroissants, en incorporant la notion de sensibilité à l'extrémité inférieure [31] de la distribution.

Axiome 1.3.6 – Principe de sensibilité à l'extrémité inférieure de la distribution–. *Soit une distribution de revenus* $\mathbf{x}$ *rangée par ordre non-décroissant. Les transferts progressifs d'un montant* $\delta > 0$ *entre les individus* i *et* j *d'une part et* k *et* ℓ *d'autre part, tous les 4 localisés au bas de la distribution tels que* $x_i < x_j$ *et* $x_k < x_\ell$ *avec* $x_i < x_k$*, et* $r_\ell = 4$*, satisfont les conditions suivantes :*

$$x_i + \delta \leqslant x_{i+1};\ x_{j-1} \leqslant x_j - \delta; \tag{SDTa}$$

$$x_k + \delta \leqslant x_{k+1}\ ;\ x_{\ell-1} \leqslant x_\ell - \delta; \tag{SDTb}$$

$$r_j - r_i = r_\ell - r_k =: \gamma; \tag{SDTc}$$

$$x_j - x_i = x_\ell - x_k =: \varepsilon. \tag{SDTd}$$

Le principe de sensibilité à l'extrémité inférieure de la distribution de revenus est strictement respecté si :

$$I(\mathbf{z}) := I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_i^n - \mathbb{1}_j^n)\delta, n\right) < I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_k^n - \mathbb{1}_\ell^n)\delta, n\right) =: I(\mathbf{y}).$$

31. Cette notion s'inspire des travaux de Cowell (2000), Álvarez-García *et al.* (2004), ou encore Aaberge (2007) qui traitent de la sensibilité des indicateurs au niveau des queues de distribution.

Cette reformulation du principe fort des transferts décroissants consiste à comparer deux transferts progressifs. Le premier de ces transferts a lieu à l'extrémité inférieure de la distribution, entre les deux premiers individus i et j qui se trouvent être les plus pauvres conformément au classement. On les retrouve dans la nouvelle distribution de revenus $\mathbf{z}$ formée à la suite de l'application du transfert. Le second transfert est également localisé dans la queue inférieure de la distribution. Il concerne les deux individus suivants dans le classement k et ℓ, également considérés comme pauvres au regard de leur revenu respectif. Les quatre individus les moins bien lotis de la distribution, sont tous impliqués dans une relation de transfert. Le principe requiert que le transfert entre les individus i et j soit plus efficace en terme de réduction des disparités que celui appliqué entre les individus k et ℓ, dès lors que les écarts de revenus et de rangs entre les donneurs et les receveurs sont les mêmes. De tels transferts permettent ainsi de diminuer la dispersion des revenus sur la queue inférieure de la distribution.

Proposition 1.3.4 *Le $\alpha-$Gini satisfait strictement le principe de sensibilité à l'extrémité inférieure de la distribution de revenus si, et seulement si, $\alpha > 2$.*

Preuve.
(Nécessité) : Considérons une distribution de revenus $\mathbf{x}$ rangée par ordre croissant comprenant 5 individus i, j, k, ℓ et m, tels que $x_\ell \leqslant x_m$. Après application des transferts mentionnés dans la définition du principe fort des transferts décroissants, nous obtenons :

$$\mathbf{z} = (x_i + \delta,\ x_j - \delta, x_k, x_\ell, x_m) \text{ et } \mathbf{y} = (x_i, x_j, x_k + \delta,\ x_\ell - \delta, x_m).$$

D'après la définition, nous devons nous assurer que $I(\mathbf{z}) < I(\mathbf{y})$. Soit pour le $\alpha-$Gini : $G^\alpha(\mathbf{z}) < G^\alpha(\mathbf{y})$. Nous réalisons les calculs des indices $\alpha-$Gini de manière explicite :

$$
\begin{aligned}
&(x_m-(x_i+\delta))^\alpha+(x_m-(x_j-\delta))^\alpha+(x_m-x_k)^\alpha+(x_m-x_\ell)^\alpha+((x_j-\delta)-(x_i+\delta))^\alpha\\
&+(x_k-(x_j-\delta))^\alpha+(x_\ell-(x_j-\delta))^\alpha+(x_k-(x_i+\delta))^\alpha+(x_\ell-(x_i+\delta))^\alpha+(x_\ell-x_k)^\alpha\\
&<(x_m-x_i)^\alpha+(x_m-x_j)^\alpha+(x_m-(x_k+\delta))^\alpha+(x_m-(x_\ell-\delta))^\alpha+((x_\ell-\delta)-(x_k+\delta))^\alpha\\
&+((x_k+\delta)-x_j)^\alpha+((x_\ell-\delta)-x_j)^\alpha+((x_k+\delta)-x_i)^\alpha+((x_\ell-\delta)-x_i)^\alpha+(x_j-x_i)^\alpha.
\end{aligned}
$$

En invoquant la condition (SDTc) nous pouvons exprimer les revenus des individus j et ℓ en fonction de ceux des individus i et k : $x_j = x_i+\varepsilon$ et $x_\ell = x_k+\varepsilon$ tel que $\varepsilon > \delta > 0$. En intégrant cette transformation dans l'équation précédente il vient :

$$
\begin{aligned}
&(x_m-x_i-\delta)^\alpha+(x_m-x_i-\varepsilon+\delta)^\alpha+(x_m-x_k)^\alpha+(x_m-x_k-\varepsilon)^\alpha+(\varepsilon-2\delta)^\alpha\\
&+(x_k-x_i-\varepsilon+\delta)^\alpha+(x_k+\varepsilon-x_i-\varepsilon+\delta)^\alpha+(x_k-x_i-\delta)^\alpha+(x_k+\varepsilon-x_i-\delta)^\alpha+(\varepsilon)^\alpha\\
&<(x_m-x_i)^\alpha+(x_m-x_i-\varepsilon)^\alpha+(x_m-x_k-\delta)^\alpha+(x_m-x_k-\varepsilon+\delta)^\alpha+(\varepsilon-2\delta)^\alpha\\
&+(x_k+\delta-x_i-\varepsilon)^\alpha+(x_k+\varepsilon-\delta-x_i-\varepsilon)^\alpha+(x_k+\delta-x_i)^\alpha+(x_k+\varepsilon-\delta-x_i)^\alpha+(\varepsilon)^\alpha.
\end{aligned}
$$

Toutes les comparaisons de revenus par paire entre les individus concernés par la relation de transferts s'annulent. Après réarrangement des termes, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&(x_m-x_i-\delta)^\alpha+(x_m-x_i-\varepsilon+\delta)^\alpha-(x_m-x_i)^\alpha-(x_m-x_i-\varepsilon)^\alpha\\
&<(x_m-x_k-\delta)^\alpha+(x_m-x_k-\varepsilon+\delta)^\alpha-(x_m-x_k)^\alpha-(x_m-x_k-\varepsilon)^\alpha.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Posons $f(x) := (x_m-x-\delta)^\alpha+(x_m-x-\varepsilon+\delta)^\alpha-(x_m-x)^\alpha-(x_m-x-\varepsilon)^\alpha$ où f est une fonction différentiable pour tout x positif. Le principe fort des transferts décroissants appliqué en bas de la distribution implique alors que :

$$f(x_i) < f(x_k),$$

pour tout $x_i < x_k$.

La fonction f devrait donc être strictement croissante. Puisque f est différentiable, une condition nécessaire est que $f'(x) > 0$ pour tout x. Cette fonction f peut également être strictement croissante si $f'(x) = 0$ pour certains x, à condition que cela ne soit pas le cas pour tout x de l'intervalle. Notons que :

$$f'(x) = -\alpha\cdot\left[(x_m - x - \delta)^{\alpha-1} + (x_m - x - \varepsilon + \delta)^{\alpha-1} - (x_m - x)^{\alpha-1} - (x_m - x - \varepsilon)^{\alpha-1}\right] ,$$

avec $\alpha \geqslant 1$; alors $f'(x) = 0$ si $\alpha = 1$, ou encore si $\alpha = 2$. Cependant dans ces deux cas $f'(x) = 0$ pour tout x. Par ailleurs, afin d'obtenir $f'(x) = 0$ nous devrions avoir $(x_m-x-\varepsilon+\delta)^{\alpha-1}-(x_m-x-\varepsilon)^{\alpha-1} = (x_m-x)^{\alpha-1}-(x_m-x-\delta)^{\alpha-1}$ pour certains x, ce qui n'est pas le cas si $\alpha \neq 1; 2$. Par conséquent, $f'(x) > 0$ pour tout x est une condition nécessaire et suffisante afin que f soit strictement croissante. Soit :

$$(x_m - x - \delta)^{\alpha-1} + (x_m - x - \varepsilon + \delta)^{\alpha-1} < (x_m - x)^{\alpha-1} + (x_m - x - \varepsilon)^{\alpha-1};$$

ce qui donne,

$$(x_m - x - \varepsilon + \delta)^{\alpha-1} - (x_m - x - \varepsilon)^{\alpha-1} < (x_m - x)^{\alpha-1} - (x_m - x - \delta)^{\alpha-1},$$

ou de manière équivalente,

$$(x_m-x-(\varepsilon-\delta))^{\alpha-1}-(x_m-x-(\varepsilon-\delta)-\delta)^{\alpha-1} < (x_m-x)^{\alpha-1}-(x_m-x-\delta)^{\alpha-1},$$

pour tout x tel que $x_m - x - \varepsilon > 0$. Rappelons que $\varepsilon > \delta > 0$. Par conséquent, $\epsilon := (\varepsilon - \delta) > 0$. En posant $g(x) := (x_m - x)^{\alpha-1} - (x_m - x - \delta)^{\alpha-1}$ il apparaît que la précédente condition requiert que $g(x + \epsilon) < g(x)$ pour tout x et pour tout $\epsilon > 0$ tels que $x_m - x - \delta > \epsilon$. Cela est le cas si $g(x)$ est strictement décroissante. Notons que $g'(x) = -(\alpha - 1) \cdot [(x_m - x)^{\alpha-2} - (x_m - x - \delta)^{\alpha-2}]$. Nous obtenons donc que $g'(x) = 0$ seulement si $\alpha = 1$, ou si $\alpha = 2$. Dans tous les autres cas $g'(x) \neq 0$. Il s'ensuit que $g'(x) < 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour que $g(x)$ soit strictement décroissante. La condition requiert donc que :

$$\begin{aligned} -(\alpha - 1) \cdot \left[(x_m - x)^{\alpha-2} - (x_m - x - \delta)^{\alpha-2}\right] &< 0 \\ \Longrightarrow \quad (x_m - x)^{\alpha-2} &> (x_m - x - \delta)^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Cette dernière condition est toujours vraie pour tout x, si et seulement si $\alpha > 2$, compte tenu du fait que $\delta > 0$.

(Suffisance) : A présent, supposons que la distribution de revenus comprend $n \geqslant 5$ individus, tels que :

$$\mathbf{z} = (x_i{+}\delta,\ x_j{-}\delta,\ x_k,\ x_\ell, x_m, \dots, x_n) \quad \text{et} \quad \mathbf{y} = (x_i,\ x_j,\ x_k{+}\delta,\ x_\ell{-}\delta, x_m, \dots, x_n).$$

En appliquant le même raisonnement que précédemment, $G^\alpha(\mathbf{z}) < G^\alpha(\mathbf{y})$ donne :

$$\begin{aligned}
&\sum_r (x_r - (x_i+\delta))^\alpha + \sum_r (x_r - (x_j-\delta))^\alpha + \sum_r (x_r - x_k)^\alpha + \sum_r (x_r - x_\ell)^\alpha \\
&+ (x_k - (x_j-\delta))^\alpha + (x_\ell - (x_j-\delta))^\alpha + (x_k - (x_i+\delta))^\alpha + (x_\ell - (x_i+\delta))^\alpha \\
&+ ((x_j-\delta) - (x_i+\delta))^\alpha + (x_\ell - x_k)^\alpha < ((x_\ell-\delta) - (x_k+\delta))^\alpha + +(x_j - x_i)^\alpha \\
&+ ((x_k+\delta) - x_j)^\alpha + ((x_\ell-\delta) - x_j)^\alpha + ((x_k+\delta) - x_i)^\alpha + ((x_\ell-\delta) - x_i)^\alpha \\
&+ \sum_r (x_r - x_i)^\alpha + \sum_r (x_r - x_j)^\alpha + \sum_r (x_r - (x_k+\delta))^\alpha + \sum_r (x_r - (x_\ell-\delta))^\alpha,
\end{aligned}$$

pour chacune des sommes $r \neq \{i, j, k, \ell\}$ et $x_\ell < x_r$.
D'après la partie nécessité de la preuve, toutes les comparaisons par paire entre les revenus des individus concernés par la relation de transfert s'annulent. Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}
&\sum_{r \neq \{i,j,k,\ell\}} (x_r - (x_i+\delta))^\alpha + (x_r - (x_j-\delta))^\alpha + (x_r - x_k)^\alpha + (x_r - x_\ell)^\alpha \qquad (11) \\
&< \sum_{r \neq \{i,j,k,\ell\}} (x_r - x_i)^\alpha + (x_r - x_j)^\alpha + (x_r - (x_k+\delta))^\alpha + (x_r - (x_\ell-\delta))^\alpha.
\end{aligned}$$

Par définition, tous les x_r sont supérieurs à x_ℓ. En nous référant aux calculs effectués pour la dérivation de la condition nécessaire, nous déduisons que si $\alpha > 2$, alors l'inégalité dans (10) tient pour toute valeur de $x_m > x_\ell$. La condition mise en avant dans (11) basée sur le calcul de sommes pour tout

$r \neq \{i, j, k, \ell\}$ est équivalente aux séries de conditions présentées en (10). Elle est donc satisfaite par construction, puisqu'elle est valable pour tout élément des séries de conditions précédentes. Cette vérification conclut la preuve. $\square$

L'emplacement des individus affectés par les transferts au sein de la distribution de revenus est essentiel pour le résultat. Un résultat similaire peut être obtenu si l'on s'intéresse à la sensibilité de l'indicateur suite à l'application de transferts en haut de la distribution de revenus. Dans ce nouveau cas de figure, le transfert progressif qui touche les individus les plus riches de la distribution doit avoir un plus grand impact que le transfert de même montant appliqué entre les individus situés juste après ces derniers, afin que l'action redistributive soit bénéfique à l'ensemble de la population. Par analogie au cas précédent, ce principe est qualifié de *principe de sensibilité à l'extrémité supérieure de la distribution.*

Corollaire 1.3.1 *Le $\alpha-$Gini satisfait strictement le principe fort des transferts décroissants appliqué en haut de la distribution de revenus si, et seulement si, $\alpha > 2$.*

Preuve.
Mutatis mutandis dans la Proposition 1.3.4. Le résultat peut être vérifié en utilisant l'indice de $\alpha-$Gini absolu qui respecte la propriété d'invariance par translation : $I^\alpha(\mathbf{x}) = I^\alpha(\epsilon \cdot \mathbb{1}^n - \mathbf{x})$ pour un certain $\epsilon \in \mathbb{R}$. En posant $\epsilon > \max\{x_i\}$, il est possible d'analyser l'effet du principe des transferts lorsqu'il est appliqué en haut de la distribution. Pour ce faire, nous considérons les distributions $\mathbf{x}' = \epsilon \cdot \mathbb{1}^n - \mathbf{x}$, $\mathbf{z}' = \epsilon \cdot \mathbb{1}^n - \mathbf{z}$ et $\mathbf{y}' = \epsilon \cdot \mathbb{1}^n - \mathbf{y}$, où :

$$\mathbf{z}' = (x'_n, \ldots, x'_m, x'_\ell, x'_k, x'_j + \delta, x'_i - \delta) \text{ et } \mathbf{y}' = (x'_n, \ldots, x'_m, x'_\ell + \delta, x'_k - \delta, x'_j, x'_i)$$

avec $x'_n \leqslant \ldots \leqslant x'_m \leqslant x'_\ell \leqslant x'_k < x'_j + \delta \leqslant x'_i - \delta$ et $x'_n \leqslant \ldots \leqslant x'_m < x'_\ell + \delta \leqslant x'_k - \delta < x'_j \leqslant x'_i$.

Poser $\alpha > 2$ revient, par conséquent, à imposer que $I^\alpha(\mathbf{z}') < I^\alpha(\mathbf{y}')$. Ce qui est équivalent à $I^\alpha(\mathbf{z}) < I^\alpha(\mathbf{y})$, ou plus simplement $G^\alpha(\mathbf{z}) < G^\alpha(\mathbf{y})$. □

L'indice $\alpha-$Gini est sensible aux transformations qui affectent les queues de distribution, lorsque $\alpha > 2$. En raison de sa construction mathématique, il est d'autant plus sensible, lorsque les transferts ciblent les revenus extrêmes de la distribution (soit les revenus les plus faibles, soit les revenus les plus élevés). Comme cela a pu être argumenté précédemment, pour des valeurs de $\alpha = 1$, ou $\alpha = 2$, l'indice $\alpha-$Gini reste inchangé après application du principe (SDT). Conformément à la preuve de la Proposition 1.3.4, nous pouvons affirmer que pour des valeurs de $\alpha \in]1; 2[$ le principe de transfert suscite une réaction opposée sur l'indice $\alpha-$Gini dont la valeur tend à augmenter. Il n'est alors plus question de sensibilité à l'extrémité inférieure (ou supérieure) de la distribution : la relation d'ordre est inversée $I(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_i^n - \mathbb{1}_j^n)\delta, n) > I\left(\mathbf{x} + (\mathbb{1}_k^n - \mathbb{1}_\ell^n)\delta, n\right)$, pour $\alpha \in]1; 2[$.

De manière générale l'étude de l'impact des transferts sur le $\alpha-$Gini fait ressortir les propriétés normatives de cet indicateur. Ces propriétés sont fortement liées à la valeur du paramètre α qui reflète la sensibilité du décideur politique (son aversion) face aux disparités. Le fait que la structure de notre indicateur soit compatible aussi bien avec des mesures de la famille de l'entropie généralisée (par exemple, le coefficient de variation élevé au carré), que des mesures de la famille de l'indice de Gini, ne nous permet pas de valider le principe fort des transferts décroissants pour tout α. Les résultats obtenus au travers de nos analyses restent néanmoins cohérents avec la littérature sur le sujet. Le $\alpha-$Gini apparaît comme un indicateur atypique, aux propriétés intéressantes. Il possède comme tout indicateur d'inégalité, une fonction de bien-être social. Ainsi par dualité nous avons :

$$W^\alpha(\mathbf{x}, n) = \mu(\mathbf{x})^\alpha[1 - G^\alpha(\mathbf{x}, n)] = \mu(\mathbf{x})^\alpha - \frac{1}{2n(\mathbf{x})^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}|x_i - x_r|^\alpha .$$

En dépit de sa ressemblance avec la fonction de bien-être social du Gini standard, cette fonction ne coïncide avec aucune des trois familles de Gini faisant intervenir des paramètres d'aversion pour l'inégalité, à savoir la famille des $S-$Gini [Donaldson et Weymark (1980)], des $\mathcal{P}-$Gini [Gajdos (2002)] ou encore celle des indices de Gini généralisés [Lerman et Yitzhaki (1989)].

Les mesures $\alpha-$Gini n'en sont pas moins décomposables. Ainsi, comme nous le montrons dans la section suivante, ces mesures peuvent être soumises au même procédé de décomposition que l'indice de Gini. Compte tenu des propriétés normatives rattachées au paramètre β de la distance économique $\beta-$directionnelle [*voir*, Section 1.2.2], nous généralisons l'approche standard de Dagum à plusieurs niveaux de partitions pour décomposer les mesures $\alpha-$Gini. L'utilisation simultanée d'un paramètre de sensibilité au non-chevauchement (β) et d'un paramètre d'aversion pour l'inégalité (α) nous permet de proposer une approche plus large et plus complète de la décomposition en multi-niveaux des mesures d'inégalité, comparativement aux autres méthodes préexistantes.

1.3.2 La méthode de décomposition en multi-niveaux

Le montant de revenu est propre à chaque individu. Il est constitué par un agrégat de plusieurs sources telles que la rémunération d'une activité professionnelle (*c.-à-d.* le salaire), ou de l'absence de celle-ci (par exemple, les allocations chômage, le revenu de solidarité active (RSA)), parfois complété par des aides supplémentaires, sans compter les revenus de l'épargne et autres bénéfices financiers dont jouissent certains individus. Le montant de chacune de ces sources est basé sur divers critères socioéconomiques qui sont amenés à évoluer au fil des années et des gouvernements. Il peut alors sembler assez restrictif de n'attribuer l'existence de disparités de revenus qu'à un seul et unique facteur explicatif, comme nous amène à le faire la décomposition en sous-groupes de l'indice de Gini de Dagum précédemment mentionnée.

Les inégalités de revenus peuvent en effet être imputables à différents facteurs simultanés tels que la catégorie socioprofessionnelle, l'expérience, le niveau de qualification ou encore la localisation géographique. Il est donc souhaitable de pouvoir utiliser ces différents critères au cours du processus de décomposition afin d'affiner l'évaluation des disparités qui en résulte.

Dès 1984, le concept de décomposition est progressivement étendu à plusieurs niveaux de partitions. Une première généralisation de la décomposition additive en sous-groupes à plusieurs niveaux de groupes de partitions (issus de la même population mère) est notamment proposée par Cowell (1985). Cette première extension ne s'adresse néanmoins qu'à l'indice de Theil. Des recherches antérieures menées par Adelman et Levy (1984), les conduisent à déconseiller l'utilisation d'une *décomposition en multi-niveaux* pour l'indice de Theil. Le principal argument avancé par ces auteurs est qu'une telle procédure peut conduire à des résultats erronés selon l'ordre d'association des différentes partitions, retenu pour les calculs. Cowell (1985) parvient cependant, en s'appuyant sur les travaux de ses pairs [32], à démontrer la simplicité d'interprétation et d'application d'une telle méthode de décomposition.

Il construit son raisonnement à partir du même exemple de partitionnement que celui retenu par Adelman et Levy (1984). Dans leur développement initial, les auteurs distinguent trois partitions issues de la population mère, notées $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{K}$. Chacune de ces partitions peut être déclinée en plusieurs sous-

32. La décomposition d'Adelman et Levy (1984) est une extension de celle proposée par Fishlow (1972) dans le but de mettre en avant d'importantes disparités de revenus constatées au Brésil en 1960.

catégories telles que $\mathscr{I}$ représente le groupe ethnique des individus, $\mathscr{J}$ leur lieu de naissance et $\mathscr{K}$ leur niveau d'éducation. Pour décomposer l'indice de Theil selon ces trois critères, Cowell définit deux termes. Le premier terme représente les inégalités relevées au sein des différents groupes, inclus dans chacun des groupes de partitions (composante *intragroupe*). Le second terme mesure les inégalités observées entre ces groupes (composante *intergroupe*). On retrouve alors l'idée que la composante intragroupe correspond à une moyenne pondérée des inégalités au sein de chaque groupe de partition. A cette première composante, s'ajoute une composante intergroupe calculée à partir des moyennes de revenus des différents groupes de partitions. Tout se passe comme si des transferts intragroupes étaient appliqués au revenu de chaque individu jusqu'à ce que le revenu de chacun des membres du groupe soit égal à la moyenne de revenu du groupe. Plusieurs formulations sont possibles selon la ou les partitions considérées comme référence pour les calculs. Quelle que soit la formulation retenue, le résultat final doit toujours correspondre à l'indice de Theil total.

Décomposition en multi-niveaux de l'indice de Theil, Cowell (1985) :

$$T(\mathbf{x}, n) = \sum_{i=1} \sum_{j=1} \sum_{k=1} x_{ijk} \; T_{ij} + \bar{T}(\mathscr{I}\mathscr{J}),$$

avec

$$T(\mathbf{x}, n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu} \log\left(\frac{x_i}{\mu}\right) \quad \text{et} \quad x_{ijk} = \frac{X_{ijk}}{\sum_{i'=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} X_{i'j'k'}} \; ,$$

X_{ijk} étant le revenu agrégé du sous-groupe ijk. $\bar{T}(\mathscr{I}\mathscr{J})$ est le terme d'inégalité intergroupe mesuré en fonction de deux critères considérés simultanément : le groupe ethnique ($\mathscr{I}$) ainsi que le lieu de naissance ($\mathscr{J}$) des individus (chaque individu n'appartenant qu'à un seul ensemble de partitions). T_{ij} représente l'indicateur de Theil calculé à l'intérieur des groupes i et j tel que :

$$T_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ijk} \; log\left(\frac{x_{ijk}}{n_{ijk}}\right) \quad \text{avec} \quad n_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{\sum_{i'=1}^{n} \sum_{j'=1}^{n} \sum_{k'=1}^{n} N_{i'j'k'}},$$

où N_{ijk} est l'effectif du sous-groupe ijk.

Une telle procédure présuppose que chaque individu de la population n'appartienne qu'à un seul et unique ensemble de partitions. Dans le cas particulier où les partitions sont orthogonales [*c.-à-d.* où $\bar{T}(\mathscr{I}\mathscr{J}) = \bar{T}(\mathscr{I}) + \bar{T}(\mathscr{J})$] certaines simplifications sont envisageables. Cowell insiste sur la simplicité d'interprétation des divers résultats. Il démontre, alors, que contrairement à l'idée défendue par Adelman et Levy (1984), la valeur de l'inégalité globale n'est en aucune façon sensible à l'ordre dans lequel les partitions sont choisies lors de la décomposition. L'indice de Theil est bien décomposable en multi-niveaux.

Il faut ensuite attendre les travaux de Salas (2002) pour que la décomposition en multi-niveaux soit étendue à la classe entière de l'entropie généralisée. A l'origine, ces travaux portent sur un problème de convergence interterritoriale. Plutôt que de recourir aux mesures de $\beta-$convergence et $\sigma-$convergence [33] employées dans la plupart des publications sur le sujet, Salas (2002) décide de généraliser la propriété de décomposition en multi-niveaux. Il démontre ainsi que l'ensemble des mesures de la famille de l'entropie généralisée (y compris la mesure de Theil-0 séparable en pondérations de population) peuvent être décomposées additivement sur plusieurs niveaux de partitions. De plus, contrairement aux indicateurs de $\beta-$convergence et $\sigma-$convergence, les mesures de l'entropie généralisée satisfont les axiomes de Schur-convexité et d'anonymat. [34]

Pour formaliser sa décomposition, Salas (2002) se base sur un concept de partitions imbriquées. Il imagine deux partitions $\mathbb{K}$ et $\mathbb{S}_k$, contenant chacune un nombre K et S_k de sous-groupes avec $K \leqslant S_k$; $\mathbb{S}_k$ étant elle-même une sous-partition de $\mathbb{K}$. Il adapte, alors, la définition de la décomposition additive de

33. Il s'agit d'indicateurs préconisés par Barro et Sala-i-Martin (1990, 1992) afin de tester l'existence de convergences régionales.

34. *voir*, Mornet *et al.* (2014) pour plus de précisions.

Shorrocks (1980, 1984) en lui rajoutant une composante d'inégalité intergroupe dite de *second ordre* [*cf.*, Wodon (1999)]. Cette composante supplémentaire permet de capter les inégalités qui affectent les groupes situés le long de la sous-partition $\mathbb{S}_k$ à l'intérieur $\mathbb{K}$. La décomposition de Salas comprend finalement, une composante d'inégalité intragroupe estimée sur la seconde partition $\mathbb{S}_k$, une composante d'inégalité intergroupe de *premier ordre* (mesurée sur $\mathbb{K}$) et une composante d'inégalité intergroupe de second ordre, comme l'exprime l'équation ci-dessous.

Décomposition additive en multi-niveaux généralisée, Salas (2002) :

$$I(\mathbf{x}) = I_{w,S} + I_{b,K} + I_{b,SK} \quad \text{avec} \quad I_{b,SK} := \sum_{k=1}^{K} w_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}) I(\mu_{k1}\mathbb{1}_{n_{k1}}, \ldots, \mu_{kS_k}\mathbb{1}_{n_{kS_k}}) \ ;$$

où $I_{w,S}$ et $I_{b,K}$ correspondent aux composantes d'inégalités intragroupes et intergroupes définies par Shorrocks (1980, 1984), à la seule différence qu'elles concernent ici deux partitions emboîtées $\mathbb{S}_k$ et $\mathbb{K}$.

Salas (2002) démontre une complémentarité entre les différentes composantes. Lorsque la composante intragroupe diminue d'un certain montant, la composante intergroupe augmente d'autant et inversement. Il apparaît de plus que la composante d'inégalité intergroupe converge vers l'inégalité totale dès lors que le nombre de groupes tend vers le nombre d'individus. *A contrario*, si le nombre de groupes tend vers 1, la composante d'inégalité intergroupe va, quant à elle, tendre vers 0. Un raisonnement contraire tient pour la composante intragroupe.

Cette définition de la décomposition en multi-niveaux reste valable pour toute séquence finie de sous-partitions, à la condition que ces dernières soient imbriquées les unes dans les autres selon un ordre décroissant du nombre de sous-groupes qu'elles contiennent.

Avant de s'intéresser à la classe entière des mesures de l'entropie généralisée, une extension de la décomposition en multi-niveaux à l'indice de Gini est envisagée quelques années plus tôt par Wodon (1999). L'auteur proposait alors d'étendre la décomposition de Lerman et Yitzhaki (1991) à plusieurs niveaux de partitions. Tout comme ce fut le cas de la décomposition sur un seul niveau, la proposition de Wodon (1999) est écartée, en raison de la structure inadaptée de la composante intergroupe. Le principal inconvénient de cette composante est qu'elle peut emprunter des valeurs nulles, voire négatives du fait de la présence de l'indice de stratification [*cf.* Lerman et Yitzhaki (1991)]. L'idée de décomposer l'indice de Gini sur plusieurs niveaux est finalement reprise par Mussard, Pi Alperin, Seyte et Terraza (2006). Les auteurs s'inspirent des travaux de Salas (2002) pour généraliser la décomposition en sous-groupes de Dagum (1997*a* ; 1997*b*) à plusieurs niveaux de partitions.

Le cadre de départ est identique à celui introduit par Salas (2002) : deux partitions emboîtées $\mathbb{K}$ et $\mathbb{S}_k$, subdivisées en K et S_k sous-groupes disjoints et non vides. Le principe de décomposition sur plusieurs niveaux reste identique à celui employé par Salas dans le cas des mesures de l'entropie généralisée. Il s'agit de compléter le schéma classique de décomposition sur un niveau de partition par une composante d'inégalité intergroupe de second ordre. Une telle composante vise à estimer les disparités de revenus entre les sous-groupes de la sous-partition $\mathbb{S}_k$, elle-même située à l'intérieur de la partition K. Cette nouvelle composante offre, de plus, la possibilité de mesurer l'intensité des chevauchements entre les sous-groupes inclus dans les différentes partitions.

Décomposition en multi-niveaux du Gini standard, Mussard *et al.* (2006) :

$$G(\mathbf{x}, n) = G_{w,S} + G_{gb,K} + G_{gb,SK},$$

avec $G_{w,S}$ le terme d'inégalité intragroupe calculé sur la sous-partition $\mathbb{S}_k$;

$G_{gb,K}$ le terme d'inégalité intergroupe brut calculé sur la première partition $\mathbb{K}$ $-$dit de premier ordre$-$ et $G_{gb,SK}$ le terme intergroupe de second ordre.[35]

Dans le cas plus général du $\alpha-$Gini, les travaux de Chameni Nembua (2011, 2013) démontrent que ces mesures satisfont la méthode de décomposition en sous-groupes de Dagum sur un seul niveau de partition. Leur structure est donc compatible avec celle de notre indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle introduit à la Section 1.2. De plus, comme l'indique Ebert (2010) la méthode de décomposition de Dagum peut être considérée comme une interprétation possible de l'axiome de décomposition faible.

"*Dagum (1997) presents a particular decomposition of the Gini coefficient into the inequality within the subgroups, the net inequality between subgroups, and a third term related to the intensity of overlapping between the subgroups. The sum of his second and third term is identical to the between-group term defined here.*" [Ebert (2010), p. 97 note 7].

Il est donc possible d'étendre la portée de cette méthode de décomposition en intégrant à la structure de chacune des composantes principales, un paramètre d'aversion pour l'inégalité α. La contribution intergroupe brute ainsi modifiée (G^{α}_{gb}) se décline alors à l'aide de la distance économique $\beta-$directionnelle en deux éléments ($G^{\alpha,\beta}_{nb}$) et ($G^{\alpha,\beta}_{t}$) que nous explicitons par la suite. Pour ne pas limiter notre approche à un seul niveau de partitionnement, nous choisissons de l'étendre à plusieurs niveaux. Notons que les valeurs des paramètres de sensibilité α et β peuvent être modulées selon le niveau de partition sur lequel la décomposition s'effectue. Afin de faire ressortir la portée de cette paramétrisation dans le cadre de la décomposition, nous qualifions le processus d'(α,β)–décomposition en multi-niveaux [voir, Mornet *et al.* (2013)]. Les

35. Une formulation détaillée de ce dernier terme est proposée par la suite.

travaux de Mussard *et al.* (2006) peuvent alors apparaître comme un cas particulier reflétant uniquement le point de vue d'un décideur dont l'aversion pour l'inégalité et la sensibilité pour les inégalités intergroupes pures sont toutes deux égales à l'unité ($\alpha = \beta = 1$).

Nous considérons une population $\mathscr{P}$ découpée en deux partitions, elles-mêmes subdivisées en plusieurs groupes, de telle sorte que $\mathbb{K} := \{1, \ldots, k, \ldots, K\}$ et $\mathbb{S}_k := \{1, \ldots, s, \ldots, S_k\}$. Nous supposons que le nombre total de groupes compris dans chaque partition est supérieur ou égal à 2, *c.-à-d.*, $K \geqslant 2$ et $S_k \geqslant 2$. Le degré d'aversion pour l'inégalité du décideur politique est $\alpha \in \mathbb{R}_+$. L'indicateur $\alpha-$Gini qui mesure les disparités de revenus à l'intérieur du groupe $s \in \mathbb{S}_k$, emboîté dans le groupe $k \in \mathbb{K}$ s'exprime sous la forme :

$$G^{\alpha}_{k,ss} = \frac{\sum_{i=1}^{n_s} \sum_{r=1}^{n_s} |x_{is} - x_{rs}|^{\alpha}}{2n(\mathbf{x}_s)^2 \mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}} \ .$$

L'expression de l'indicateur d'inégalité entre les groupes ℓ et s, tous deux également inclus dans k correspond alors à :

$$G^{\alpha}_{k,\ell s} = \frac{\sum_{i=1}^{n_\ell} \sum_{r=1}^{n_s} |x_{i\ell} - x_{rs}|^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_s) n(\mathbf{x}_\ell) \left[\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha} + \mu(\mathbf{x}_\ell)^{\alpha}\right]} \ .$$

Soit $p_{k,s}$ [$p_{k,\ell}$] la proportion d'individus du groupe s [ℓ] par rapport aux individus du groupe k. Nous notons alors p_k [p_h] la proportion d'individus du groupe k [h] exprimée en fonction du nombre total d'individus présents dans la population mère :

$$p_{k,s} = \frac{n(\mathbf{x}_s)}{n(\mathbf{x}_k)} \ ; \ p_{k,\ell} = \frac{n(\mathbf{x}_\ell)}{n(\mathbf{x}_k)} \ ; \ p_k = \frac{n(\mathbf{x}_k)}{n(\mathbf{x})} \ ; \ p_h = \frac{n(\mathbf{x}_h)}{n(\mathbf{x})} \ .$$

De la même façon, nous définissons la part de revenu $s^{\alpha}_{k,s}$ [$s^{\alpha}_{k,\ell}$] du groupe s [ℓ] relativement à celle du groupe k. La part de revenu du groupe k [h] rapportée à la part de revenu de la population totale est notée s^{α}_k [s^{α}_h] :

$$s^{\alpha}_{k,s} = \frac{n(\mathbf{x}_s)\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}} \ ; \ s^{\alpha}_{k,\ell} = \frac{n(\mathbf{x}_\ell)\mu(\mathbf{x}_\ell)^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}} \ ; \ s^{\alpha}_k = \frac{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}{n(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})^{\alpha}} \ ; \ s^{\alpha}_h = \frac{n(\mathbf{x}_h)\mu(\mathbf{x}_h)^{\alpha}}{n(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})^{\alpha}} \ .$$

Conformément à la propriété d'Ebert (2010), seules les moyennes $\mu(\mathbf{x}_k)$, $\mu(\mathbf{x}_h)$, $\mu(\mathbf{x}_\ell)$ at $\mu(\mathbf{x}_s)$ sont affectées d'une puissance α. Les principales composantes de notre décomposition en multi-niveaux dépendent uniquement de ce paramètre de sensibilité.

Proposition 1.3.5 *Si une population $\mathscr{P}$ est divisée en deux partitions de groupes telles que $\mathbb{S}_k \subset \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} \neq \emptyset$, alors l'$(\alpha,\beta)-$décomposition en multi-niveaux du $\alpha-$Gini selon trois composantes est donnée par :*

$$\begin{aligned} G^\alpha(\mathbf{x},n) = & \sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{s=1}^{S_k} G^\alpha_{k,ss}\ p_{k,s}\ s^\alpha_{k,s}\right] p_k\ s^\alpha_k && (G^\alpha_{w,S}) \\ & + \sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1} G^\alpha_{k,\ell s}\left(p_{k,\ell}\ s^\alpha_{k,s} + p_{k,s}\ s^\alpha_{k,\ell}\right)\right] p_k\ s^\alpha_k && (G^\alpha_{gb,SK}) \\ & + \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{K-1} G^\alpha_{kh}\left(p_k\ s^\alpha_h + p_h\ s^\alpha_k\right)\ . && (G^\alpha_{gb,K}) \end{aligned}$$

Preuve.
Nous démontrons simplement que les différentes composantes de notre $(\alpha,\beta)-$ décomposition en multi-niveaux correspondent aux termes de la décomposition de Dagum (1997a,b) dont nous adaptons la structure en fonction du paramètre α d'aversion pour l'inégalité.

Nous avons d'une part :

$$
\begin{aligned}
G^{\alpha}_{w,S} &= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=1}^{S_k} G^{\alpha}_{k,ss}\ p_{k,s}\ s^{\alpha}_{k,s}\right) p_k\ s^{\alpha}_k \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=1}^{S_k}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_s}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{is}-x_{rs}|^{\alpha}}{2n(\mathbf{x}_s)^2\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}}\right]\cdot\frac{n(\mathbf{x}_s)}{n(\mathbf{x}_k)}\cdot\frac{n(\mathbf{x}_s)\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}\right)\frac{n(\mathbf{x}_k)}{n(\mathbf{x})}\cdot\frac{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}{n(\mathbf{x})\mu(\mathbf{x})^{\alpha}} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=1}^{S_k}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_s}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{is}-x_{rs}|^{\alpha}}{2}\right]\cdot\frac{n(\mathbf{x}_s)^2\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_s)^2\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n(\mathbf{x}_k)^2\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}\right)\frac{n(\mathbf{x}_k)^2\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}{n(\mathbf{x})^2\mu(\mathbf{x})^{\alpha}} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S_k}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_s}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{is}-x_{rs}|^{\alpha}}{2n(\mathbf{x})^2\mu(\mathbf{x})^{\alpha}}\right].
\end{aligned}
$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
&G^{\alpha}_{gb,SK} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1} G^{\alpha}_{k,\ell s}\left(p_{k,\ell}\ s^{\alpha}_{k,s}+p_{k,s}\ s^{\alpha}_{k,\ell}\right)\right) p_k\ s^{\alpha}_k \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_\ell}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{i\ell}-x_{rs}|^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_s)n(\mathbf{x}_\ell)(\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}+\mu(\mathbf{x}_\ell)^{\alpha})}\right]\left[\frac{n(\mathbf{x}_\ell)}{n(\mathbf{x}_k)}\frac{n(\mathbf{x}_s)\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}+\frac{n(\mathbf{x}_s)}{n(\mathbf{x}_k)}\frac{n(\mathbf{x}_\ell)\mu(\mathbf{x}_\ell)^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_k)\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}\right]\right) \\
&\quad\times\frac{n(\mathbf{x}_k)}{n(\mathbf{x})}\frac{n(\mathbf{x}_k)}{n(\mathbf{x})}\frac{\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}{\mu(\mathbf{x})^{\alpha}} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_\ell}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{i\ell}-x_{rs}|^{\alpha}}{n(\mathbf{x}_s)n(\mathbf{x}_\ell)(\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}+\mu(\mathbf{x}_\ell)^{\alpha})}\cdot\frac{n(\mathbf{x}_s)n(\mathbf{x}_\ell)(\mu(\mathbf{x}_s)^{\alpha}+\mu(\mathbf{x}_\ell)^{\alpha})}{n(\mathbf{x}_k)^2\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}\right]\right)\frac{n(\mathbf{x}_k)^2}{n(\mathbf{x})^2}\frac{\mu(\mathbf{x}_k)^{\alpha}}{\mu(\mathbf{x})^{\alpha}} \\
&= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_\ell}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{i\ell}-x_{rs}|^{\alpha}}{n(\mathbf{x})^2\mu(\mathbf{x})^{\alpha}}\right]\right).
\end{aligned}
$$

Notons que :

$$
\sum_{s=1}^{S_k} G^{\alpha}_{k,ss}\ p_{k,s}\ s^{\alpha}_{k,s}+\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1} G^{\alpha}_{k,\ell s}\left(p_{k,\ell}\ s^{\alpha}_{k,s}+p_{k,s}\ s^{\alpha}_{k,\ell}\right) = G^{\alpha}(\mathbf{x}_k) =: G^{\alpha}_{kk}.
$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
G^{\alpha}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=1}^{S_k} G^{\alpha}_{k,ss}\ p_{k,s}\ s^{\alpha}_{k,s}\right) p_k\ s^{\alpha}_k + \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1} G^{\alpha}_{k,\ell s}(p_{k,\ell}\ s^{\alpha}_{k,s} + p_{k,s}\ s^{\alpha}_{k,\ell})\right) p_k\ s^{\alpha}_k \\
&\quad + \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1} G^{\alpha}_{kh}(p_k\ s^{\alpha}_h + p_h\ s^{\alpha}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S_k}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_s}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{is}-x_{rs}|^{\alpha}}{2n(\mathbf{x})^2\mu(\mathbf{x})^{\alpha}}\right] + \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_\ell}\sum_{r=1}^{n_s}|x_{i\ell}-x_{rs}|^{\alpha}}{n(\mathbf{x})^2\mu(\mathbf{x})^{\alpha}}\right]\right) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1} G^{\alpha}_{kh}\,(p_k\ s^{\alpha}_h + p_h\ s^{\alpha}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{K} G^{\alpha}_{kk}\ p_k\ s^{\alpha}_k + \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1} G^{\alpha}_{kh}\,(p_k\ s^{\alpha}_h + p_h\ s^{\alpha}_k) \\
&= G^{\alpha}_{w} + G^{\alpha}_{gb}.
\end{aligned}$$

□

Nous supposons que le degré d'aversion pour l'inégalité (α) du décideur est uniforme quel que soit le niveau de partition considéré. Nous identifions la première composante de cette décomposition comme la composante d'inégalité intragroupe $G^{\alpha}_{w,S}$. Elle fournit une appréciation des disparités à l'intérieur de la sous-partition $\mathbb{S}_k$. Les inégalités entre les groupes de cette même partition sont captées par la composante $G^{\alpha}_{gb,SK}$, encore qualifiée de composante intergroupe de second ordre. L'appellation de composante d'inégalité intergroupe de premier ordre est attribuée au terme $G^{\alpha}_{gb,K}$ qui se rapporte aux disparités entre les groupes de la première partition $\mathbb{K}$. Cette dernière composante correspond à la contribution des inégalités intergroupes brutes. Elle est présentée sous forme compactée et ne laisse pas explicitement apparaître l'expression de la distance économique β–directionnelle.

Corollaire 1.3.2 *S'il existe une partition $\mathbb{K}$ telle que $\mathbb{S}_k = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{K}$ avec $\alpha = 1$ (et implicitement $\beta = 1$), alors nous retrouvons la décomposition* *de l'indice de Gini en deux termes de Dagum* (1997a, 1997b) :

$$G(\mathbf{x},n)=\sum_{k=1}^{K}p_k\ s_k\ G_{kk}+\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}(p_k\ s_h+p_h\ s_k)G_{kh}\ .$$

Preuve.
Soit une population $\mathscr{P}$ divisée en plusieurs sous-groupes sur une seule partition $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}G^{\alpha}(\mathbf{x},n)=&\sum_{k=1}^{K}G^{\alpha}_{kk}\ p_k\ s^{\alpha}_k\\&+\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}G^{\alpha}_{kh}D_{kh}(\beta)\,(p_k\ s^{\alpha}_h+p_h\ s^{\alpha}_k)\\&+\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}G^{\alpha}_{kh}[1-D_{kh}(\beta)]\,(p_k\ s^{\alpha}_h+p_h\ s^{\alpha}_k)\end{aligned}$$

En posant $\alpha=\beta=1$ nous obtenons :

$$G(\mathbf{x},n)=\sum_{k=1}^{K}p_k\ s_k\ G_{kk}+\sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1}(p_k\ s_h+p_h\ s_k)G_{kh}\ .$$

□

Il ne s'agit là que d'une présentation synthétique de l'$(\alpha,\beta)-$décomposition en multi-niveaux. Il est possible de développer davantage la structure des différents termes, en faisant ressortir les composantes d'inégalités intergroupes nettes et de transvariation mesurées sur les différentes partitions. Il nous suffit de faire appel à l'indicateur de distance économique $\beta-$directionnelle $-$introduit à la Section 1.2$-$ pour le calcul des disparités entre les différents groupes. Compte tenu des différents niveaux de partitions pris en considération dans le processus de décomposition, nous pouvons supposer que le degré de sensibilité du décideur au non-chevauchement fluctue selon le niveau de la partition sur lequel l'inégalité est mesurée. Par souci de clarté, nous postulons que la sensibilité du décideur face à ces inégalités est identique sur les différentes partitions $\mathbb{S}_k$ et $\mathbb{K}$, soit en d'autres termes que $\beta^{\mathbb{S}_k} = \beta^{\mathbb{K}} = \beta$.

Proposition 1.3.6 *Si une population $\mathscr{P}$ est divisée en deux partitions de groupes telles que $\mathbb{S}_k \subset \mathbb{K}$, alors l'$(\alpha,\beta)-$décomposition en multi-niveaux du $\alpha-$Gini selon cinq composantes est donnée par :*

$$
\begin{aligned}
G^{\alpha}(\mathbf{x},n) = & \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=1}^{S_k} G^{\alpha}_{k,ss}\; p_{k,s}\; s^{\alpha}_{k,s}\right) p_k\; s^{\alpha}_k && (G^{\alpha}_{w,S})\\
& + \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1} G^{\alpha}_{k,\ell s}\; D_{k,\ell s}(\beta)(p_{k,\ell}\; s^{\alpha}_{k,s} + p_{k,s}\; s^{\alpha}_{k,\ell})\right) p_k\; s^{\alpha}_k && (G^{\alpha,\beta}_{nb,SK})\\
& + \sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{s=2}^{S_k}\sum_{\ell=1}^{s-1} G^{\alpha}_{k,\ell s}\; (1 - D_{k,\ell s}(\beta))(p_{k,\ell}\; s^{\alpha}_{k,s} + p_{k,s}\; s^{\alpha}_{k,\ell})\right) p_k\; s^{\alpha}_k && (G^{\alpha,\beta}_{t,SK})\\
& + \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1} G^{\alpha}_{kh} D_{kh}(\beta)(p_k\; s^{\alpha}_h + p_h s^{\alpha}_k) && (G^{\alpha,\beta}_{nb,K})\\
& + \sum_{k=2}^{K}\sum_{h=1}^{k-1} G^{\alpha}_{kh}(1 - D_{kh}(\beta))(p_k\; s^{\alpha}_h + p_h\; s^{\alpha}_k)\ . && (G^{\alpha,\beta}_{t,K})
\end{aligned}
$$

Preuve.
Il suffit de remarquer que $G^{\alpha}_{gb,K} = G^{\alpha,\beta}_{nb,K} + G^{\alpha,\beta}_{t,K}$. Le résultat est alors immédiat.
□

La présente formulation laisse clairement apparaître les deux paramètres de sensibilité aux inégalités du décideur (α et β). Tandis que α représente le degré d'aversion pour l'inégalité du décideur sur l'ensemble de la partition $\mathbb{K}$ (resp. $\mathbb{S}_k$), β exprime un degré de sensibilité essentiellement ciblé sur les interactions entre les sous-partitions. Cette nouvelle définition n'en reste pas moins équivalente à celle de la proposition 1.3.5. Quelques précisions peuvent cependant être apportées sur les termes d'inégalité supplémentaires. $G^{\alpha,\beta}_{nb,SK}$ désigne les inégalités intergroupes nettes mesurées sur la partition $\mathbb{S}_k$. Ces inégalités sont exprimées en fonction du degré d'aversion pour l'inégalité (α) du décideur ainsi que de son degré de sensibilité au non-chevauchement (β) sur cette même partition. L'intensité des chevauchements entre les distributions de la partition $\mathbb{S}_k$ est captée par la composante de transvariation $G^{\alpha,\beta}_{t,SK}$. Cette composante s'obtient en substituant à la distance $\beta-$directionnelle, le $\beta-$ratio de chevauchement $1 - D_{k,\ell s}(\beta)$. Un raisonnement analogue nous permet d'introduire $G^{\alpha,\beta}_{nb,K}$ et $G^{\alpha,\beta}_{t,K}$, les composantes d'inégalité intergroupes nettes et de transvariation calculées sur la partition $\mathbb{K}$.

Cette décomposition possède des propriétés attrayantes. Par exemple, lorsque les individus à l'intérieur de chaque groupe ont le même revenu (*c.-à-d.*, lorsque les distributions sont égalitaires et non identiques), alors la composante intragroupe $G^{\alpha}_{w,S}$ est nulle.

$$G^{\alpha}_{w,S} = 0 \quad \text{et} \quad G^{\alpha} = G^{\alpha}_{gb,SK} + G^{\alpha}_{gb,K} \ .$$

Si en revanche, chaque groupe est caractérisé par des revenus représentatifs sensiblement différents, alors il n'existe pas de phénomène transvariation entre ces deux groupes. La composante de transvariation $G^{\alpha}_{t,K}$ (ou $G^{\alpha}_{t,SK}$ selon le niveau de partition) est égale à 0 et *a fortiori* la distance économique $\beta-$directionnelle entre ces groupes est maximale, *c.-à-d.*, $D_{kh}(\beta) = 1$ (resp. $D_{k,\ell s}(\beta) = 1$). Les disparités sont, par conséquent, imputables aux écarts observés entre les plus hauts revenus des groupes les plus riches (en moyenne) et les plus faibles revenus des groupes moins aisés. Ces écarts sont pris en compte par la composante intergroupe nette dite *pure* $G^{\alpha}_{nb,K}$ (ou $G^{\alpha}_{nb,SK}$) qui représente les inégalités entre les groupes.

Soit $\quad D_{kh}(\beta) = 1$ alors, $\quad G^{\alpha}_{t,K} = 0 \quad$ et $\quad G^{\alpha} = G^{\alpha}_{w,S} + G^{\alpha}_{nb,SK} + G^{\alpha}_{t,SK} + G^{\alpha}_{nb,K}$;

soit $\quad D_{k,\ell s}(\beta) = 1$ alors, $\quad G^{\alpha}_{t,SK} = 0 \quad$ et $\quad G^{\alpha} = G^{\alpha}_{w,S} + G^{\alpha}_{nb,SK} + G^{\alpha}_{nb,K} + G^{\alpha}_{t,K}$;

ou encore $\quad D_{k,\ell s}(\beta) = D_{k,\ell s}(\beta) = 1 \quad$ et $\quad G^{\alpha} = G^{\alpha}_{w,S} + G^{\alpha}_{nb,SK} + G^{\alpha}_{nb,K}$.

Par ailleurs, si les distributions des différents groupes sont identiques (mais non égalitaires), telles que les moyennes de chaque groupe sont identiques, alors dans ce cas $G^{\alpha}_{nb,K} = 0$ (resp. $G^{\alpha}_{nb,SK} = 0$). La distance économique $\beta-$directionnelle est nulle. Par conséquent, l'inégalité totale correspond à l'ajout de la composante intragroupe $G^{\alpha}_{w,S}$ avec les composantes de transvariation des deux partitions telle que :

$$G^{\alpha} = G^{\alpha}_{w,S} + G^{\alpha}_{nb,SK} + G^{\alpha}_{t,SK} + G^{\alpha}_{t,K} \quad \text{lorsque} \quad D_{kh}(\beta) = 0 \;\; \text{et} \quad G^{\alpha}_{nb,K} = 0\ ;$$
$$G^{\alpha} = G^{\alpha}_{w,S} + G^{\alpha}_{t,SK} + G^{\alpha}_{nb,K} + G^{\alpha}_{t,K} \quad \text{lorsque} \quad D_{k,\ell s}(\beta) = 0 \;\; \text{et} \quad G^{\alpha}_{nb,SK} = 0\ ;$$
$$\text{ou encore} \quad G^{\alpha} = G^{\alpha}_{w,S} + G^{\alpha}_{t,SK} + G^{\alpha}_{t,K} \quad \text{lorsque} \quad D_{k,\ell s}(\beta) = D_{kh}(\beta) = 0.$$

De manière générale, lorsque les distributions de revenus sont diversifiées et de moyennes différentes, il est possible de déterminer avec exactitude la nature des inégalités. A partir des caractéristiques des distributions de revenus, l'agrégation des écarts de revenus entre les divers groupes peut être décomposée selon une composante de transvariation – qui mesure les chevauchements entre les distributions – et une composante d'inégalité intergroupe nette *pure*. Le paramètre β joue un rôle important dans cette décomposition. Lorsque nous limitons le nombre de partitions à un seul niveau et que nous imposons $\beta = 1$, la procédure se simplifie. Nous retrouvons alors, un cas particulier de décomposition, mis en avant par Chameni Nembua (2011, 2013), comme cela est précisé dans le corollaire qui suit.

Corollaire 1.3.3 *Si $\mathbb{S}_k = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{K}$ et $\beta = 1$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_{++}$, l'$(\alpha, 1)-$décomposition du $\alpha-$Gini n'est autre que la décomposition en sous-groupes de Chameni Nembua* (2011, 2013).

Preuve.

D'après la preuve de la Proposition 1.3.5 nous savons que :

$$\begin{aligned} G^{\alpha}(\mathbf{x}, n) &= G_w^{\alpha} + G_{gb}^{\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{K} G_{kk}^{\alpha}\ p_k\ s_k^{\alpha} + \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} G_{kh}^{\alpha} \left(p_k\ s_h^{\alpha} + p_h\ s_k^{\alpha}\right). \end{aligned}$$

En supposant que $\beta = 1$ et en multipliant la composante intergroupe par la distance économique directionnelle $(Dkh(1))$ ainsi que par le ratio de chevauchement (1-$Dkh(1)$), nous arrivons à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} G^{\alpha}(\mathbf{x}, n) &= \sum_{k=1}^{K} G_{kk}^{\alpha}\ p_k\ s_k^{\alpha} + \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} \left[G_{kh}^{\alpha} \left(p_k\ s_h^{\alpha} + p_h\ s_k^{\alpha}\right)\right] \left[Dkh(1) + (1 - Dkh(1))\right] \\ &= \sum_{k=1}^{K} G_{kk}^{\alpha}\ p_k\ s_k^{\alpha} + \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} G_{kh}^{\alpha} Dkh(1) \left(p_k\ s_h^{\alpha} + p_h\ s_k^{\alpha}\right) \\ &+ \sum_{k=2}^{K} \sum_{h=1}^{k-1} G_{kh}^{\alpha} (1 - Dkh(1)) \left(p_k\ s_h^{\alpha} + p_h\ s_k^{\alpha}\right) \\ &= G_w^{\alpha} + G_{nb}^{\alpha} + G_t^{\alpha}\ ; \end{aligned}$$

il s'agit bien de la décomposition de Chameni Nembua (2011, 2013), qui est *a fortiori* un cas particulier de l'$(\alpha, \beta)-$décomposition en multi-niveaux du $\alpha-$Gini. □

Dans la section suivante nous proposons une illustration de l'$(\alpha, \beta)-$décomposition sur deux niveaux de partitions. Cette illustration vient compléter notre analyse des disparités de revenus entre les sexes, présentées à la section 1.2.3 pour le cas de la France en 2005.

1.3.3 Une illustration sur deux niveaux de partitions

La France est l'un des pays européens dans lequel la proportion d'individus âgés de 20 à 64 ans a le taux d'emploi le plus faible. Plus exactement parmi les 25 pays qui constituent l'Union Européenne en 2005, la France figure au $16^{ème}$ rang européen, avec un taux d'emploi de 75,3% pour les hommes contre 63,7% pour les femmes (soit un taux d'emploi global de 69,4%[36]). L'activité sur le marché du travail présente quelques dissimilarités qui semblent être liées au sexe des individus. Cette nouvelle illustration a pour but d'approfondir la précédente analyse concernant les inégalités de revenus entre les sexes, présentée à la section 1.2.3. Au delà des faits historiques qui nous permettent de mieux comprendre la persistance de ces inégalités, de nombreux paramètres entrent en ligne de compte avant qu'un homme ou une femme ne parvienne à se faire une place sur le marché du travail. Un paramètre souvent déterminant pour les recruteurs est l'âge des individus. Reflet de l'expérience professionnelle ou plus généralement de la maturité d'un individu, l'âge est le deuxième critère que nous choisissons de prendre en compte pour affiner notre étude des disparités de revenus entre les sexes, dans le cas de la France pour l'année 2005.

Les inégalités sont mesurées à l'aide de l'indicateur $\alpha-$Gini. Comme cela est avancé à la section précédente, cet indicateur est particulièrement sensible aux queues des distributions. Il est donc tout à fait indiqué pour mesurer les disparités de revenus entre les sexes souvent caractérisées par des écarts de revenus notables. Au cours de notre étude, nous faisons varier le degré d'aversion pour l'inégalité du décideur politique (α) entre 1 et 4, tout comme son degré de sensibilité au non-chevauchement (β). Rappelons que lorsque $\alpha = 1$, l'indicateur $1-$Gini n'est autre que le coefficient de Gini standard. Lorsque $\alpha = 2$,

36. « Le taux d'emploi est calculé en divisant le nombre de personnes occupées de 20 à 64 ans par la population totale de la même classe d'âge. ». Source : Eurostat.

le 2$-$Gini correspond au coefficient de variation élevé au carré. Les mesures 3$-$Gini et 4$-$Gini bien que moins connues dans la littérature produisent de bonnes appréciations des disparités. De plus, elles intègrent des degrés d'aversion pour l'inégalité plus élevés que le Gini ou le coefficient de variation élevé au carré.

Les données sont issues de la même base d'enquête[37] que celle utilisée à la section 1.2.3. De plus, nous conservons le même mode opératoire de sélection des données. Nous retravaillons donc avec notre échantillon de 14 281 individus âgés de 18 à 65 ans (au 1er janvier 2005, en France). Pour simplifier la mise en œuvre des calculs, nous modifions à nouveau la macro Excel afin d'étendre son application à toutes les mesures faiblement décomposables dont la structure correspond à celle du $\alpha-$Gini. Un guide d'utilisation du programme est proposé dans Mornet (2013).

Les inégalités de revenus[38] sont décomposées selon deux niveaux de partitions. Le critère du sexe est désormais couplé à celui de l'âge. Par souci de clarté, seuls cinq groupes d'âges sont construits sur chacune des partitions (*c.-à-d.*, le groupe des hommes est subdivisé en cinq sous-groupes et il en est de même pour celui des femmes). Les individus sont regroupés selon cinq classes d'âge qui s'étendent de 18 à 65 ans. Un tel classement permet de limiter le nombre d'indicateurs inter- et intragroupes à calculer, ce qui facilite leur interprétation. Plus le nombre de composantes est important, plus il est difficile de tirer des conclusions pertinentes quant à la nature des disparités. Les statistiques élémentaires relatives aux différents groupes constitués à partir de notre échantillon sont les suivantes :

37. Enquête « Budget des familles 2005-2006 ».
38. Il s'agit toujours des revenus annuels individuels. Pour une définition plus détaillée des sources de revenu considérées, se reporter à la section 1.2.3.

Femmes	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$	Total
Individus	983	1 549	2 608	799	1 183	7 122
Moyennes de revenus (€)	7 402,92	14 688,04	15 717,76	17 301,60	14 653,08	14 347,00
Gini total (G_T)	**0,0918**	0,0616	0,0717	0,0752	0,0846	0,0774

Tableau 1.2 – **Statistiques élémentaires décrivant la répartition des femmes selon les différentes classes d'âge retenues.**

Hommes	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$	Total
Individus	946	1 560	2 614	817	1 222	7 159
Moyennes de revenus (€)	8 904,20	19 387,51	24 977,73	25 796,76	23 788,26	21 526,03
Gini total (G_T)	**0,1349**	0,0861	0,1055	0,1039	0,1060	0,1117

Tableau 1.3 – **Statistiques élémentaires décrivant la répartition des hommes selon les différentes classes d'âge retenues.**

Nous supposons que le degré d'aversion pour l'inégalité du décideur (α) ainsi que sa sensibilité au non-chevauchement (β) sont uniformes sur les différents niveaux de partitions (*c.-à-d.* $\alpha_{\mathbb{K}} = \alpha_{\mathbb{S}} \equiv \alpha$ et $\beta_{\mathbb{K}} = \beta_{\mathbb{S}} \equiv \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \{1, \cdots, 4\}$). Une analyse préliminaire nous permet de constater que l'impact du degré d'aversion pour l'inégalité du décideur (α) sur les différentes composantes n'est pas directement visible sur le premier niveau de partition (*voir*, Tableau 1.10 en Annexes). Dans notre échantillon, les inégalités totales sont à 48% dues à des écarts de revenus observées entre individus de même sexe et à 52% entre individus de sexe opposé, pour tout $(\alpha, \beta) \in \{1, \cdots, 4\}$. D'autre part, plus la sensibilité du décideur politique pour les non-chevauchements (β) tend vers 4, plus la part des disparités imputables à des écarts de revenus constatés entre les hommes et les femmes (dont la moyenne de revenus annuelle est inférieure à celle des hommes) est importante (se reporter aux Tableaux 1.7 à 1.14 en Annexes). De plus, les inégalités constatées au sein de notre échantillon sont principalement attribuables aux hommes. Le fait d'intégrer un deuxième niveau de partitionnement (imbriqué dans le premier) est destiné à nous permettre de déterminer quelles sont les classes d'âge masculines et féminines qui entretiennent le plus d'inégalités avec les autres classes.

Sur ce deuxième niveau de partition, nous analysons séparément les effets des paramètres α et β sur les disparités au sein du groupe des hommes puis au sein de celui des femmes. Une augmentation dans la valeur du paramètre α entraîne une augmentation de l'attention portée aux disparités présentes dans le groupe des hommes. Sur le plan statistique, cela se traduit par une augmentation de la contribution de la composante se rapportant aux inégalités de revenus entre les hommes par rapport aux inégalités globales observées en France en 2005. Par exemple, alors que les disparités au sein du groupe des hommes représentent $28,57\%$ des inégalités totales lorsque $\alpha = 1$, leur contribution augmente à $47,42\%$ du total pour $\alpha = 4$ [*voir* Tableaux 1.32 à 1.39 en Annexes]. Parallèlement, la contribution de la composante mesurée dans le groupe des femmes s'amoindrit jusqu'à compter pour moins de 1% des inégalités totales lorsque $\alpha = 4$ [*voir* Tableaux 1.23 à 1.30 en Annexes].

Nous nous concentrons à présent sur les écarts de revenus relatifs aux groupes constitués pour la deuxième étape du procédé de décomposition. Les groupes reflétant les différentes classes d'âges retenues pour notre analyse possèdent tous des tailles très disparates. Nous choisissons donc d'appuyer nos commentaires sur les valeurs des coefficients non pondérés également fournis par la macro commande Excel. Le fait d'occulter les pondérations du calcul des composantes évite que les résultats soient influencés par un *effet taille.*

Il est fréquent de constater que les coefficients pondérés les plus élevés, sont ceux qui se rapportent aux groupes ayant les plus gros effectifs. De manière générale, les inégalités à l'intérieur des différentes classes d'âges restent faibles. Les indices de Gini ($\alpha = 1$) intragroupes tendent vers 0,10. Au fur et à mesure que la valeur de α augmente, la contribution des divers groupes aux inégalités totales se réduit progressivement. La plupart des coefficients estimés pour $\alpha = 1$ représentent environ 20% de l'ensemble des inégalités constatées sur notre échantillon. Une classe d'âge se démarque néanmoins des autres. Il s'agit de la classe des individus dont l'âge est inclus dans l'intervalle]35-50]. Alors que la contribution des femmes âgées entre 35 et 50 ans se réduit à mesure que α augmente, la contribution des hommes s'accroît lentement et finit par atteindre environ 67% (des inégalités totales) quand $\alpha = 4$ [*voir* Tableau 1.4 ci-dessous]. Rappelons que lorsque le degré d'aversion pour l'inégalité est égal à 4 (ou plus largement : $\alpha > 2$), le décideur est plus sensible à ce qui se passe sur les queues des distributions. Les résultats observés sur notre échantillon découlent du fait que dans le groupe des hommes âgés entre 35 et 50 ans, les plus gros écarts de revenus concernent des valeurs extrêmes (*c.-à-d.*, situées dans les queues de la distribution). Le décideur politique est par conséquent enclin à porter davantage attention aux disparités de revenus entre les hommes. Ces disparités deviennent une priorité quand sa sensibilité pour les inégalités est maximale (dans notre cas $\alpha = 4$ au maximum).

Les jeunes individus n'intègrent généralement pas le marché du travail avant l'âge de 20 ans. Jusqu'à cet âge, leur activité est plutôt hétérogène : petits boulots, travail en alternance dans une entreprise, formation professionnelle, stage de fin d'études, *etc.* Leurs revenus sont plutôt disparates et génèrent des inégalités auxquelles un décideur dont l'aversion est égale à 1 est particulièrement sensible. De plus, la proportion d'individus qui poursuivent des études universitaires (ou en écoles privées) est assez importante en France. C'est seulement autour de 25-30 ans que les individus peuvent réellement sécuriser leur

$G^{\alpha}_{k,ss}/G^{\alpha}_{T}$	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$
$\boldsymbol{\alpha=1}$					
Hommes	34,51%	22,03%	**26,99%**	0,41%	26,58%
Femmes	23,50%	15,75%	18,35%	19,24%	21,65%
$\boldsymbol{\alpha=2}$					
Hommes	27,93%	17,80%	44,18%	21,58%	23,65%
Femmes	13,14%	6,15%	9,49%	9,68%	15,46%
$\boldsymbol{\alpha=3}$					
Hommes	7,71%	12,07%	66,29%	7,66%	9,05%
Femmes	2,50%	0,89%	2,46%	1,94%	6,49%
$\boldsymbol{\alpha=4}$					
Hommes	1,13%	7,53%	**66,93%**	1,68%	2,05%
Femmes	0,25%	0,07%	0,54%	0,24%	**2,17%**

Tableau 1.4 – **Contributions intragroupes des hommes et des femmes aux inégalités totales.**

position sur le marché du travail. La part d'inégalités estimée sur cette classe d'âge reste cependant relativement faible par rapport aux autres classes. Les inégalités les plus conséquentes sont identifiées au sein de la troisième classe d'âge : le groupe des 35-50 ans. Ces disparités de revenus s'expliquent principalement par les différents plans de carrière adoptés par les individus qui régissent le choix de leur activité professionnelle. Les écarts de revenus les plus marqués concernent surtout les hommes âgés de 35 à 50 ans, car si les femmes prennent une part grandissante à la vie active, nous constatons qu'il n'existe que très peu d'inégalités de revenus au sein de leur groupe (]35,50] ans) en 2005.

Ce n'est cependant pas le cas pour toutes les classes d'âges féminines. La classe des femmes âgées de 55 à 65 ans concentre près de 22% des inégalités totales pour un décideur dont le degré d'aversion $\alpha = 1$ [*voir* Tableau 1.4]. La part d'inégalité des hommes mesurée pour la même classe d'âge et dans des conditions identiques correspond environ à 27% des inégalités totales. En 2005, un nombre non négligeable d'hommes choisit de tirer avantage du système de retraites établi en France un an auparavant.[39] Un comportement inverse s'observe en revanche pour la plupart des femmes qui décident de rester en activité. Les écarts de revenus se creusent alors entre les femmes en activité et celles qui ont pris leur retraite. Pour ce qui est des individus âgés de 50 à 55 ans, nous pouvons supposer qu'ils bénéficient de hauts salaires en raison de leur ancienneté professionnelle. Les écarts de revenus constatés au sein de ces groupes (hommes ou femmes) sont faibles.

Les même commentaires s'appliquent aux contributions des composantes calculées entre les groupes d'âge. Ces contributions sont évaluées d'une part au sein de la partition des hommes et d'autre part au sein de celle des femmes. C'est donc sans surprise que les contributions entre les groupes d'âge les plus significatives impliquent majoritairement des hommes. La classe des hommes âgés de 35 à 50 ans apparaît notamment comme la plus inégalitaire au regard des autres classes d'âges masculines. Les différences de revenus les plus prononcées sont constatées entre les classes [18-25] et]35-50] [se reporter aux Tableaux 1.34, 1.36, 1.38 et 1.40 pour plus de détails]. Une tranche d'âge différente est mise en évidence par l'étude des disparités entre les femmes. Il s'agit du groupe de femmes âgées de 55 à 65 ans qui entretient la plupart des inégalités avec les autres groupes [*voir* Tableaux 1.25, 1.27, 1.29 et 1.31].

L'influence du paramètre de sensibilité au non-chevauchement (β) sur ce deuxième niveau de partition est semblable à celle constatée sur le premier niveau. Les contributions des composantes intergroupes nettes ($G^{\alpha,\beta}_{nb,SK}/G^{\alpha}_{T}$ avec $(\alpha, \beta) \in$

39. En 2004, le gouvernement français donne la possibilité aux individus qui possèdent déjà une longue carrière professionnelle, de partir en retraite anticipée (âges concernés : 55 ans et plus).

$\{1, \ldots 4\}$) observent une tendance à la hausse qui va de pair avec la progression de la valeur de β [pour plus de détails voir Tableaux 1.24, 1.26, 1.28, 1.30 dans le cas des femmes et Tableaux 1.33, 1.35, 1.37, 1.39 dans le cas des hommes]. En définitive, même si les revenus des hommes et des femmes tendent à se rapprocher pour certaines tranches d'âge, les inégalités au sein du groupe des hommes restent majoritaires. Ce constat est conditionné par les valeurs des paramètres de sensibilité aux inégalités du décideur politique, intégrées dans nos calculs. A titre d'exemple, quand le groupe des hommes semble représenter $28,57\%$ des inégalités totales, celui des femmes contribue à hauteur $19,80\%$ (pour tout β et $\alpha = 1$). Si en revanche l'aversion pour l'inégalité du décideur correspond à un degré $\alpha = 4$, la contribution des hommes passe à $47,72\%$ pendant que celle des femmes est ramenée à $0,78\%$ des inégalités totales, (voir les Tableaux 1.33, 1.39 and 1.24, 1.30 en Annexes). La valeur de ces paramètres est déterminante pour l'analyse des inégalités. Elle enrichit de façon notable le procédé de décomposition initialement proposé par Dagum (1997a, 1997b), puis ensuite repris par Mussard *et al.* (2006) dans le cas de plusieurs niveaux de partitions.

Cette analyse sur deux niveaux de partitions, nous permet d'approfondir notre étude des disparités de revenus entre les sexes dans le cas de la France en 2005. La prise en considération du critère de l'âge, nous donne la possibilité de prouver que contrairement à ce que l'on aurait pu penser au regard des résultats sur un seul niveau de partition, les revenus de certaines femmes génèrent également des inégalités notables au sein de notre échantillon. Plus précisément, ce sont les femmes âgées entre 55 et 65 ans qui détiennent les plus gros écarts de revenus avec les autres femmes de la distribution. De la même façon, nous savons désormais que parmi les 7 159 hommes de notre échantillon, se sont les hommes âgés entre 35 et 50 ans qui génèrent le plus d'inégalité. Cette illustration montre qu'il est utile de tenir compte de plusieurs critères socioéconomiques lorsque l'on souhaite déterminer avec exactitude la cause des inégalités.

1.4 Conclusion

En 1988, Shorrocks publie un article sur les questions liées à l'agrégation des mesures d'inégalité. Il remet alors en cause le processus de décision qui conduit au choix d'un indice d'inégalité particulier. Dans son analyse, il distingue les « propriétés de base » qui se veulent essentielles à la mesure d'inégalité, des « propriétés subsidiaires » qui méritent pourtant toute notre attention. Shorrocks met en garde contre l'utilisation automatique de certains indicateurs d'inégalité, choisis par habitude ou par défaut.

« This is the motivation for the search for additional "subsidiary" properties, which narrow down the options, and hence assist in both theoritical and empirical applications. If this search is not undertaken, there is a tendency to continue using those measures that have been popular in the past. The index is then chosen by default, or historical accident rather than by assessment of its merits. » [Shorrocks (1988), p.433]

Le choix d'une mesure d'inégalité doit résulter d'une décision objective et réfléchie. Shorrocks (1988) insiste notamment sur le fait que ce choix doit s'effectuer en fonction de ce que l'analyste désire faire ressortir au cours de son étude. La symétrie (SM), la normalisation (NM), l'invariance par réplication (PP) et le respect du principe de transfert de Pigou et Dalton (PD) constituent ce que Shorrocks (1988) présente comme les propriétés de base. [40] Elles sont indisso-

40. Chacune de ces propriétés est présentée formellement dans la suite de notre développement.

ciables de la notion de mesure d'inégalité et donnent accès à des évaluations cohérentes et plus représentatives de la réalité économique. La difficulté principale est de déterminer quelles sont les propriétés supplémentaires qui peuvent être ajoutées à un indicateur d'inégalité afin qu'il fournisse une estimation qui soit la plus précise et la plus pertinente possible.

Loin d'être une propriété subsidiaire et pourtant souvent considérée comme telle, la propriété de décomposition en sous-groupes offre une meilleure compréhension des disparités de revenus. Il est, en effet, important pour un décideur politique de pouvoir identifier avec exactitude les moteurs des inégalités observées, dans le but de mettre en place des actions redistributives adaptées aux besoins de la population. Le problème se ramène alors au choix de la méthode de décomposition et non plus à celui de l'indicateur à utiliser. Celui-ci repose bien souvent sur des critères subjectifs qui ne se rapportent pas directement au mécanisme de décomposition en lui-même, mais visent implicitement les mesures d'inégalités sous-jacentes. On peut s'interroger sur ce que serait devenue la propriété de décomposition additive reconsidérée par Shorrocks (1984,1988) si elle n'avait pas été satisfaite par les mesures de la famille de l'entropie généralisée, mais par les mesures basées sur les moments d'ordres q définies par Foster et Schneyerov (2000) dans le cadre de la décomposition avec des composantes indépendantes. Une remarque analogue peut être formulée pour l'indice de Gini, bien que son procédé de décomposition ait nécessité bien plus de temps et de tentatives que l'entropie généralisée.

Il nous paraît essentiel de choisir une méthode de décomposition qui ne se limite pas à une seule de ces deux familles d'indicateurs. La décomposition en sous-groupes de l'indice de Gini suggérée par Dagum (1997a, 1997b) contient les prémices de la notion de décomposition faible récemment axiomatisée par Ebert (2010). Pour cette raison, elle est à la base de notre travail de réflexion.

L'(α, β)–décomposition en sous-groupes constitue, en effet, une généralisation de la décomposition de Dagum. L'intérêt majeur de cette généralisation est qu'elle propose une formulation alternative de la décomposition faible au sens d'Ebert et s'applique à tous les indicateurs pouvant s'écrire de la façon suivante :

$$G^{\alpha}(\mathbf{x}, n) := \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|^{\alpha}}{2n^2\mu^{\alpha}(\mathbf{x})} \ , \quad \forall\alpha \geqslant 1 \ ; \tag{12}$$

où α représente le degré d'aversion pour l'inégalité d'un décideur politique.

Cette structure commune correspond à celle des mesures dites *basées sur des paires*, étudiées par Mussard et Terraza (2009). Les auteurs suggèrent notamment l'emploi d'une technique de décomposition pour laquelle la composante intragroupe, tout comme la composante intergroupe, est construite à partir de *comparaisons interpersonnelles* des revenus individuels. Il ne s'agit donc plus d'évaluer les disparités entre les groupes à partir des revenus moyens (des divers groupes), mais de tenir compte des revenus de chacun des individus et de les comparer deux à deux. L'énoncé de l'axiome correspondant à ce principe, désormais connu sous le nom de *décomposition faible*, est introduit par Ebert (2010).

Ebert caractérise plusieurs indicateurs de la classe des mesures faiblement décomposables. Parmi ces indicateurs figurent les indices correspondant à l'équation (12) pour lesquels Chameni Nembua (2006b, 2011, 2013) est le premier à proposer une adaption de la décomposition de Dagum (1997a, 1997b). Dans son adaptation, Chameni Nembua (2006b, 2011, 2013) préserve l'indicateur intergroupe de distance économique directionnelle tel qu'il est formulé par Dagum. Des recherches menées parallèlement à celles de Chameni Nembua (2011, 2013), nous [41] conduisent à proposer une généralisation plus étendue de la décomposition de Dagum à l'ensemble des mesures $\alpha-$Gini. Nous modifions notamment

41. *Cf.* Mornet *et al.* (2013)

la structure de la distance économique directionnelle afin qu'elle intègre un nouveau paramètre β de sensibilité aux inégalités intergroupes pures. Nous présentons notre décomposition sous la dénomination d'(α, β)-décomposition en sous-groupes (définis sur un ou plusieurs niveaux de partitions).

Les principaux apports de cette (α, β)-décomposition en sous-groupes résident dans l'intégration des paramètres α et β. Le paramètre α représente l'aversion pour l'inégalité du décideur et s'applique à l'ensemble des composantes intra- et intergroupes. Il influe sur les différences binaires de revenus (en valeur absolue) calculées à l'intérieur de chaque groupe et sur la moyenne des revenus de chaque groupe. Matérialisé par un exposant (α) à valeurs variables, ce paramètre d'aversion pour l'inégalité confère d'intéressantes propriétés normatives à l'indicateur $\alpha-$Gini. Nous avons montré que cet indicateur est sensible aux valeurs extrêmes situées dans les queues des distributions, dès lors que $\alpha > 2$. Sur le plan axiomatique le $\alpha-$Gini est une mesure régulière, qui, en plus de satisfaire le principe de Pigou-Dalton (pour tout $\alpha \geqslant 1$) satisfait le *principe fort des transferts décroissants* de Chateauneuf *et al.* (2002), lorsqu'il est appliqué au bas (ou en haut) de la distribution. La localisation des donneurs et receveurs de revenus joue en effet un rôle essentiel dans notre analyse des actions redistributives. Nous trouvons, de plus, que l'indice de Gini standard et le coefficient de variation élevé au carré sont compatibles avec notre $(\alpha, \beta)-$décomposition en sous-groupes. Notre décomposition s'applique donc aussi bien à des mesures pouvant dépendre du rang (dans le cas du Gini standard) qu'à des mesures additivement séparables (comme le coefficient de variation au carré par exemple).

Le paramètre β permet quant à lui de capter la sensibilité d'un décideur politique aux inégalités situées dans les zones de non-chevauchement entre deux distributions. Il s'applique uniquement à la distance économique directionnelle brute d_{kh} et au moment de transvariation p_{kh}. L'expression globale de ces indicateurs est élevée à la puissance β afin de former l'indicateur intergroupe de distance économique $\beta-$directionnelle $D_{kh}(\beta)$. Cette distance $\beta-$directionnelle est une généralisation de la distance directionnelle de Dagum (1980) $D_{kh}(1)$. Les propriétés normatives d'un tel indicateur de distance économique sont également étudiées. Nous avons ainsi démontré que la distance économique $\beta-$directionnelle ne réagit pas de la même façon que le $\alpha-$Gini lorsque la répartition des individus impliqués dans la relation de transferts entre deux groupes est asymétrique. A la différence du $\alpha-$Gini qui est sensible aux queues de distributions lorsque $\alpha > 2$, la distance économique $\beta-$directionnelle est sensible aux moyennes de revenus des groupes auxquels les individus appartiennent, ainsi qu'aux chevauchements entre les groupes, pour tout $\beta \geqslant 1$. La décomposition que nous proposons est donc plus générale que celle introduite par Chameni Nembua (2011, 2013) qui ne tient compte que d'une configuration particulière dans laquelle β serait uniquement égal à 1.

Nous avons également montré que le concept d'$(\alpha, \beta)-$décomposition en sous-groupes reste valable lorsque les groupes sont répartis sur plusieurs niveaux de partitions. Lorsque α et β sont égaux à l'unité, nous retrouvons alors l'expression de la décomposition en multi-niveaux de l'indice de Gini de Mussard *et al.* (2006). Nous présentons deux formulations alternatives pour l'$(\alpha, \beta)-$décomposition en multi-niveaux du $\alpha-$Gini. La première d'entre elles consiste en une décomposition basée sur trois composantes. Les inégalités intra- et inter-groupes peuvent ainsi être calculées sur les différents niveaux de partitions. Le troisième terme évoqué correspond au terme d'inégalité intergroupe brut qui révèle les inégalités entre les partitions. La structure d'une telle composante est très proche de celle suggérée par Dagum (1997a). La principale différence est que, dans notre cas, cette composante tient compte de deux paramètres de sensibilité aux inégalités (α et β). La seconde expression de l'$(\alpha, \beta)-$décomposition en multi-niveaux repose sur cinq composantes. Les composantes supplémentaires sont formées à partir de la composante intergroupe brute. Nous utilisons la distance économique $\beta-$directionnelle pour définir une composante d'inégalité intergroupe nette et une composante d'inégalité de transvariation sur les différents niveaux de partitions.

La paramétrisation retenue permet d'envisager des situations dans lesquelles le degré d'aversion pour l'inégalité du décideur ne s'exprime pas de manière uniforme entre les différents groupes et à l'intérieur des groupes. La réflexion peut même être poussée plus loin en donnant la possibilité de traiter les cas où la sensibilité (α ou β) du décideur varie selon le niveau de partition sur lequel les groupes sont définis.

L'interprétation des diverses composantes inhérentes au processus de décomposition est exposée au travers d'une étude empirique des inégalités de revenus menée en deux temps. Cette étude se rapporte au cas de la France pour l'année 2005. Nous construisons notre échantillon à partir des données de l'enquête « Budget des familles 2005-2006 » mises à notre disposition par l'*Insee*. Nous commençons par analyser les inégalités selon le critère du sexe des individus (premier niveau de partitionnement). Nous complétons ensuite ce premier critère de partitionnement avec celui de l'âge des individus (second niveau de partitionnement). En faisant varier les valeurs des paramètres α et β entre 1 et 4, nous décomposons quatre indicateurs différents parmi lesquels se trouvent l'indice de Gini standard ($\alpha = 1$, $\beta \geqslant 1$) et le coefficient de variation élevé au carré ($\alpha = 2$, $\beta \geqslant 1$). A l'issue de l'application de notre (α,β)–décomposition, nous identifions les hommes comme la source principale des disparités, en particulier lorsque l'aversion pour l'inégalité du décideur tend vers 4. De la même façon, la prise en considération du paramètre de sensibilité au non-chevauchement (β) révèle que le décideur politique est d'autant plus sensible aux écarts constatés entre les hauts revenus des hommes et les revenus plus faibles des femmes (dont la moyenne de revenus annuels est inférieure à celle des hommes) que la valeur de β est élevée.

La lecture des inégalités selon le critère du sexe et de l'âge des individus nous permet d'identifier le groupe des hommes âgés de 35 à 50 ans comme le groupe le plus inégalitaire de notre échantillon. Les femmes âgées entre 55 et 65 ans contribuent néanmoins à expliquer une part substantielle des disparités mesurées au sein du groupe des femmes. La récente participation des femmes dans la vie active ainsi qu'une entrée tardive des jeunes individus sur le marché du travail sont les deux principales raisons que nous retenons pour justifier des résultats avancés par l'analyse de la décomposition des $\alpha-$Gini. En dépit des efforts poursuivis par le gouvernement français dans le but d'établir une égalité des rémunérations entre les hommes et les femmes, nous sommes forcés de constater qu'en 2005, une hétérogénéité plutôt forte persiste.

L'introduction des paramètres α et β dans la structure d'un indicateur d'inégalité joue finalement un rôle important dans l'évaluation des disparités. Elle a de plus, un impact significatif sur les politiques économiques redistributives qui visent à réduire les inégalités de nature intra- ou intergroupes. Nous établissons donc une relation intrinsèque entre le degré d'aversion pour l'inégalité et le nombre de transferts qu'un planificateur social peut décider de mettre en place. Les retombées économiques de telles actions nécessitent généralement un certain temps avant de pouvoir être jugées comme effectives ou non. La prise en considération de l'espace temps constitue en effet un autre critère déterminant dans l'étude des écarts de revenus entre les individus. Dans le chapitre suivant, nous choisissons d'intégrer une dimension temporelle à notre analyse. Cette dimension temporelle nous permet d'élargir le champs d'application de la décomposition faible à une littérature plus large que celle des inégalités et nous amène à définir de nouveaux concepts qui ont trait à la croissance individuelle des revenus ou aux transferts, comme nous l'expliquons par la suite.

1.5 Annexes

1.5.1 Tableaux liés à l'illustration sur 1 niveau [Chap. 1, Sect. 2.3]

Variable de segmentation	Sexe			
Nom de l'analyse	(α, β)-Décomposition			
Nombre de groupes	2			
Nom des groupes		Total	Femmes	Hommes
Taille des groupes	n_k	14 281	7 122	7 159
Revenu total du groupe	R_k	256 284 219	102 179 336	154 104 883
Revenu moyen du groupe	M_k	17 945,82	14 347,00	21 526,03
$\frac{\text{Part du groupe}}{\text{Total}}$	$P_k = n_k/n$	1	0,4987	0,5013
$\frac{\text{Revenu du groupe}}{\text{Revenu total}}$	$S_k = R_k/R$	1	0,3987	0,6013

Tableau 1.5 – **Statistiques élémentaires relatives à l'échantillon de données**

$\beta \in \{1, \ldots, 4\}$				
G_T	G_w	G_w/G_T	G_{gb}	G_{gb}/G_T
0,3909	0,1891	48,37%	0,2018	51,63%

Tableau 1.6 – **Composantes principales de la décomposition des inégalités entre les sexes.**

$\alpha = 1$				
Ensemble	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
G_{nb}	0,1000	0,1606	0,1869	0,1967
G_{nb}/G_T	25,59%	41,08%	47,81%	50,31%
G_t	0,1018	0,0412	0,0149	0,0052
G_t/G_T	26,04%	10,55%	3,82%	1,32%

Tableau 1.7 – **Inégalités nettes et de transvariation entre les sexes lorsque $\boldsymbol{\alpha = 1}$ et pour tout $\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

Femmes		
$\beta \in \{1, \ldots, 4\}$		
avec pondération (G_w)	0,3893	99,61%
sans pondération (G_{kk})	0,0774	19,80%

Tableau 1.8 – **Inégalités et contributions à l'intérieur du groupe des femmes toutes tranches d'âge confondues.**

Hommes		
$\beta \in \{1, \ldots, 4\}$		
avec pondération (G_w)	0,3704	94,77%
sans pondération (G_{kk})	0,1117	28,57%

Tableau 1.9 – **Inégalités et contributions à l'intérieur du groupe des hommes toutes tranches d'âge confondues.**

1.5.2 Tableaux liés à l'illustration sur 2 niveaux [Chap. 1, Sect. 3.3]

• **Etude préliminaire sur un seul niveau de partition :**

$\beta \in \{1, \ldots, 4\}$				
Ensemble	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$
G_T^α	0,3909	0,8531	7,0995	135,4071
G_w^α	0,1891	0,4071	3,4285	65,6809
G_w^α / G_T^α	48,37%	47,72%	48,29%	48,51%
$G_{gb}^{\alpha,\beta}$	0,2018	0,4460	3,6710	69,7262
$G_{gb}^{\alpha,\beta} / G_T^\alpha$	51,63%	52,28%	51,71%	51,49%

Tableau 1.10 – **Composantes principales de la décomposition des inégalités entre les sexes.**

$G^{\alpha}_{kk}/G^{\alpha}_{T}$	$\boldsymbol{\alpha = 1}$	$\boldsymbol{\alpha = 2}$	$\boldsymbol{\alpha = 3}$	$\boldsymbol{\alpha = 4}$
Hommes	28,57%	36,65%	45,14%	47,72%
Femmes	19,80%	11,07%	3,15%	0,78%

Tableau 1.11 – **Contributions intragroupes des hommes et des femmes détaillées.**

Commentaire : Plus l'aversion pour les inégalités du décideur est forte, plus l'importance qu'il accorde aux écarts de revenus situés dans le groupe des hommes est grande. La contribution du groupe des hommes augmente ainsi proportionnellement à la valeur de α. Ainsi, lorsque $\alpha = 4$ la contribution des femmes n'est plus que de 0,78% alors que celle des hommes s'élève à 47,72%.

$\alpha = 2$				
Ensemble	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G^{2,\beta}_{nb}$	0,2210	0,3549	0,4130	0,4346
$G^{2,\beta}_{nb}/G^{2}_{T}$	25,91%	41,60%	48,42%	50,94%
$G^{2,\beta}_{t}$	0,2250	0,0911	0,0330	0,0114
$G^{2,\beta}_{t}/G^{2}_{T}$	26,37%	10,68%	3,86%	1,34%

Tableau 1.12 – **Inégalités nettes et de transvariation entre les sexes lorsque $\boldsymbol{\alpha = 2}$ et pour tout $\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

$\alpha = 3$				
Ensemble	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G_{nb}^{3,\beta}$	1,8192	2,9210	3,3997	3,5772
$G_{nb}^{3,\beta}/G_T^3$	25,62%	41,14%	47,89%	50,39%
$G_t^{3,\beta}$	1,8517	0,7499	0,2713	0,0938
$G_t^{3,\beta}/G_T^3$	26,08%	10,56%	3,82%	1,32%

Tableau 1.13 – **Inégalités nettes et de transvariation entre les sexes lorsque $\alpha = 3$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

$\alpha = 4$				
Ensemble	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G_{nb}^{4,\beta}$	34,5540	55,4823	64,5732	67,9445
$G_{nb}^{4,\beta}/G_T^4$	25,52%	40,97%	47,69%	50,18%
$G_t^{4,\beta}$	35,1722	14,2439	5,1531	1,7817
$G_t^{4,\beta}/G_T^4$	25,98%	10,52%	3,81%	1,32%

Tableau 1.14 – **Inégalités nettes et de transvariation entre les sexes lorsque $\alpha = 4$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

- **Etude principale sur deux niveaux de partition :**

$\boldsymbol{D_{kh}(1)}$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
$[18, 25]$	0				
]25,35]	0,7242	0			
]35,50]	0,7382	0,1003	0		
]50,55]	0,7760	0,2307	0,1288	0	
]55,65]	0,6555	0,0032	0,0887	0,2031	0

Tableau 1.15 – **Distance économique 1-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des femmes.**

$\boldsymbol{D_{kh}(2)}$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
$[18, 25]$	0				
]25,35]	0,9501	0			
]35,50]	0,9556	0,1985	0		
]50,55]	0,9687	0,4381	0,2534	0	
]55,65]	0,9170	0,0064	0,1760	0,3901	0

Tableau 1.16 – **Distance économique 2-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des femmes.**

$D_{kh}(3)$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
$[18, 25]$	0				
]25,35]	0,9919	0			
]35,50]	0,9932	0,2930	0		
]50,55]	0,9960	0,6075	0,3701	0	
]55,65]	0,9821	0,0096	0,2606	0,5497	0

Tableau 1.17 – **Distance économique 3-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des femmes.**

$D_{kh}(4)$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
$[18, 25]$	0				
]25,35]	0,9987	0			
]35,50]	0,9990	0,3820	0		
]50,55]	0,9995	0,7352	0,4762	0	
]55,65]	0,9963	0,0128	0,3414	0,6772	0

Tableau 1.18 – **Distance économique 4-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des femmes.**

$D_{kh}(1)$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
[18, 25]	0				
]25,35]	0,8192	0			
]35,50]	0,8986	0,3804	0		
]50,55]	0,9047	0,4220	0,0463	0	
]55,65]	0,8779	0,3092	0,0694	0,1157	0

Tableau 1.19 – **Distance économique 1-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des hommes.**

$D_{kh}(2)$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
[18, 25]	0				
]25,35]	0,9804	0			
]35,50]	0,9943	0,6646	0		
]50,55]	0,9950	0,7164	0,0923	0	
]55,65]	0,9916	0,5644	0,1381	0,2284	0

Tableau 1.20 – **Distance économique 2-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des hommes.**

$D_{kh}(3)$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
[18, 25]	0				
]25,35]	0,9980	0			
]35,50]	0,9997	0,8342	0		
]50,55]	0,9997	0,8742	0,1380	0	
]55,65]	0,9995	0,7438	0,2056	0,3353	0

Tableau 1.21 – **Distance économique 3-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des hommes.**

$\boldsymbol{D_{kh}(4)}$	[18,25]	]25,35]	]35,50]	]50,55]	]55,65]
$[18, 25]$	0				
]25,35]	0,9998	0			
]35,50]	1,00	0,9220	0		
]50,55]	1,00	0,9469	0,1831	0	
]55,65]	1,00	0,8561	0,2711	0,4341	0

Tableau 1.22 – **Distance économique 4-directionnelle calculée pour les différentes classes d'âge construites sur le groupe des hommes.**

$\beta \in \{1, \ldots, 4\}$				
Femmes/âges	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$
$G^{\alpha}_{T,W}$	0,0774	0,0944	0,2237	1,0581
$G^{\alpha}_{T,W}/G^{\alpha}_{T}$	**19,80%**	11,07%	3,15%	**0,78%**
$G^{\alpha}_{w,W}$	0,0180	0,0215	0,0510	0,2437
$G^{\alpha}_{w,W}/G^{\alpha}_{T}$	4,59%	2,52%	0,72%	0,18%
$G^{\alpha,\beta}_{gb,W}$	0,0595	0,0729	0,1727	0,8145
$G^{\alpha,\beta}_{gb,W}/G^{\alpha}_{T}$	**15,21%**	8,55%	2,43%	**0,60%**

Tableau 1.23 – **Composantes d'inégalité principales calculées à l'intérieur de la partition des femmes.**

$\alpha = 1$				
Femmes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G_{nb,W}^{1,\beta}$	0,0178	0,0262	0,0309	0,0346
$G_{nb,W}^{1,\beta}/G_T^1$	4,55%	6,71%	7,92%	8,85%
$G_{t,W}^{1,\beta}$	0,0417	0,0332	0,0285	0,0249
$G_{t,W}^{1,\beta}/G_T^1$	10,66%	8,50%	7,30%	6,36%

Tableau 1.24 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des femmes lorsque $\alpha = 1$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

Femmes $G_{k,\ell s}^{1,\beta}/G_T^1$	[18 – 25]	]25 – 35]	]35 – 50]	]50 – 55]	]55 – 65]
[18 – 25]	23,50%				
]25 – 35]	23,16%	15,75%			
]35 – 50]	24,78%	17,18%	18,35%		
]50 – 55]	**26,27%**	18,01%	18,94%	19,24%	
]55 – 65]	25,51%	**18,97%**	**20,11%**	**20,76%**	21,65%

Tableau 1.25 – **Contributions du groupe des femmes aux disparités totales lorsque $\alpha = 1$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

$\alpha = 2$				
Femmes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G^{2,\beta}_{nb,W}$	0,0210	0,0312	0,0370	0,0416
$G^{2,\beta}_{nb,W}/G^2_T$	2,46%	3,65%	4,34%	4,88%
$G^{2,\beta}_{t,W}$	0,0519	0,0418	0,0359	0,0313
$G^{2,\beta}_{t,W}/G^2_T$	6,09%	4,90%	4,21%	3,67%

Tableau 1.26 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des femmes lorsque $\boldsymbol{\alpha = 2}$ et pour tout $\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

Femmes $G^{2,\beta}_{k,\ell s}/G^2_T$	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$
$[18-25]$	13,14%				
$]25-35]$	11,22%	6,15%			
$]35-50]$	14,42%	7,98%	9,49%		
$]50-55]$	15,37%	8,45%	9,68%	9,68%	
$]55-65]$	**18,62%**	**10,79%**	**12,31%**	12,35%	15,46%

Tableau 1.27 – **Contributions du groupe des femmes aux disparités totales lorsque $\boldsymbol{\alpha = 2}$ et pour tout $\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

$\alpha = 3$				
Femmes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G_{nb,W}^{3,\beta}$	0,0454	0,0684	0,0822	0,0930
$G_{nb,W}^{3,\beta}/G_T^3$	0,64%	0,96%	1,16%	1,31%
$G_{t,W}^{3,\beta}$	0,1273	0,1043	0,0905	0,0796
$G_{t,W}^{3,\beta}/G_T^3$	1,79%	1,47%	1,27%	1,12%

Tableau 1.28 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des femmes lorsque $\boldsymbol{\alpha = 3}$ et pour tout $\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

Femmes $G_{k,\ell s}^{3,\beta}/G_T^3$	[18 – 25]	]25 – 35]	]35 – 50]	]50 – 55]	]55 – 65]
[18 – 25]	2,50%				
]25 – 35]	1,80%	0,89%			
]35 – 50]	**3,59%**	**1,76%**	**2,46%**		
]50 – 55]	3,24%	1,60%	2,18%	1,94%	
]55 – 65]	**7,47%**	**3,61%**	**4,23%**	3,66%	6,49%

Tableau 1.29 – **Contributions du groupe des femmes aux disparités totales lorsque $\boldsymbol{\alpha = 3}$ et pour tout $\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

$\alpha = 4$				
Femmes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G_{nb,W}^{4,\beta}$	0,1933	0,2959	0,3589	0,4090
$G_{nb,W}^{4,\beta}/G_T^4$	0,14%	0,22%	0,27%	0,30%
$G_{t,W}^{4,\beta}$	0,6211	0,5186	0,4556	0,4055
$G_{t,W}^{4,\beta}/G_T^4$	0,46%	0,38%	0,34%	0,30%

Tableau 1.30 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des femmes lorsque $\boldsymbol{\alpha = 4}$ et pour tout$\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

Femmes $G_{k,\ell s}^{4,\beta}/G_T^4$	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$
$[18-25]$	0,25%				
$]25-35]$	0,15%	0,07%			
$]35-50]$	**0,72%**	**0,34%**	**0,54%**		
$]50-55]$	0,40%	0,19%	0,36%	0,24%	
$]55-65]$	**2,48%**	**1,09%**	**1,22%**	0,86%	2,17%

Tableau 1.31 – **Contributions du groupe des femmes aux disparités totales lorsque $\boldsymbol{\alpha = 4}$ et pour tout $\boldsymbol{\beta \in \{1, \cdots, 4\}}$.**

$\beta \in \{1,\dots,4\}$				
Hommes/âges	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$	$\alpha = 3$	$\alpha = 4$
$G^{\alpha}_{T,M}$	0,1117	0,3126	3,2049	64,6228
$G^{\alpha}_{T,M}/G^{\alpha}_{T}$	**28,57%**	36,65%	45,14%	**47,72%**
$G^{\alpha}_{w,M}$	0,0260	0,0848	1,0481	22,4058
$G^{\alpha}_{w,M}/G^{\alpha}_{T}$	6,66%	9,94%	14,76%	**16,55%**
$G^{\alpha,\beta}_{gb,M}$	0,0856	0,2278	2,1567	42,2170
$G^{\alpha,\beta}_{gb,M}/G^{\alpha}_{T}$	**21,91%**	26,70%	30,38%	**31,18%**

Tableau 1.32 – **Composantes d'inégalité principales calculées à l'intérieur de la partition des hommes.**

$\alpha = 1$				
Hommes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G^{1,\beta}_{nb,M}$	0,0362	0,0493	0,0564	0,0610
$G^{1,\beta}_{nb,M}/G^{1}_{T}$	9,25%	12,60%	14,43%	15,60%
$G^{1,\beta}_{t,M}$	0,0495	0,0364	0,0292	0,0246
$G^{1,\beta}_{t,M}/G^{1}_{T}$	12,66%	9,31%	7,48%	6,31%

Tableau 1.33 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des hommes lorsque $\alpha = 1$ et pour tout $\beta \in \{1,\cdots,4\}$.**

Hommes $G^{1,\beta}_{k,\ell s}/G^1_T$	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$
$[18-25]$	34,51%				
$]25-35]$	34,88%	22,03%			
$]35-50]$	**40,71%**	**25,54%**	**26,99%**		
$]50-55]$	41,50%	25,92%	**26,89%**	0,41%	
$]55-65]$	39,99%	25,42%	**27,10%**	26,99%	26,58%

Tableau 1.34 – **Contributions du groupe des hommes aux disparités totales lorsque $\alpha = 1$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

$\alpha = 2$				
Hommes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G^{2,\beta}_{nb,M}$	0,0893	0,1232	0,1424	0,1549
$G^{2,\beta}_{nb,M}/G^2_T$	10,47%	14,44%	16,69%	18,16%
$G^{2,\beta}_{t,M}$	0,1385	0,1046	0,0854	0,0729
$G^{2,\beta}_{t,M}/G^2_T$	16,24%	12,27%	10,01%	8,55%

Tableau 1.35 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des hommes lorsque $\alpha = 2$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

Hommes $G^{2,\beta}_{k,\ell s}/G^2_T$	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$
$[18-25]$	27,93%				
$]25-35]$	29,80%	17,80%			
$]35-50]$	**57,92%**	**35,59%**	**44,18%**		
$]50-55]$	38,49%	21,89%	**32,54%**	21,58%	
$]55-65]$	**38,73%**	22,19%	**34,47%**	22,67%	23,65%

Tableau 1.36 – **Contributions du groupe des hommes aux disparités totales lorsque $\alpha = 2$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

$\alpha = 3$				
Hommes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G^{3,\beta}_{nb,M}$	0,7947	1,1143	1,2998	1,4199
$G^{3,\beta}_{nb,M}/G^3_T$	11,19%	15,70%	18,31%	20,00%
$G^{3,\beta}_{t,M}$	1,3621	1,0424	0,8569	0,7368
$G^{3,\beta}_{t,M}/G^3_T$	19,19%	14,68%	12,07%	10,38%

Tableau 1.37 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des hommes lorsque $\alpha = 3$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

Hommes $G^{3,\beta}_{k,\ell s}/G^3_T$	[18 – 25]	]25 – 35]	]35 – 50]	]50 – 55]	]55 – 65]
[18 – 25]	7,71%				
]25 – 35]	15,80%	12,07%			
]35 – 50]	**75,30%**	**50,76%**	**66,29%**		
]50 – 55]	13,77%	9,60%	**35,32%**	7,66%	
]55 – 65]	15,01%	10,46%	**39,91%**	8,31%	9,05%

Tableau 1.38 – **Contributions du groupe des hommes aux disparités totales lorsque $\alpha = 3$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

$\alpha = 4$				
Hommes/âges	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 4$
$G^{4,\beta}_{nb,M}$	15,3859	21,6051	25,2244	27,5593
$G^{4,\beta}_{nb,M}/G^4_T$	11,36%	15,96%	18,63%	20,35%
$G^{4,\beta}_{t,M}$	26,8310	20,6118	16,9926	14,6577
$G^{4,\beta}_{t,M}/G^4_T$	19,82%	15,22%	12,55%	10,82%

Tableau 1.39 – **Inégalités nettes et de transvariation sur la partition des hommes lorsque $\alpha = 4$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

Hommes $G_{k,\ell s}^{4,\beta}/G_T^4$	$[18-25]$	$]25-35]$	$]35-50]$	$]50-55]$	$]55-65]$
$[18-25]$	1,13%				
$]25-35]$	8,93%	7,53%			
$]35-50]$	**76,11%**	**53,12%**	**66,93%**		
$]50-55]$	3,00%	3,16%	**31,85%**	1,68%	
$]55-65]$	3,45%	3,74%	**37,85%**	1,85%	2,05%

Tableau 1.40 – **Contributions du groupe des hommes aux disparités totales lorsque $\alpha = 4$ et pour tout $\beta \in \{1, \cdots, 4\}$.**

Chapitre 2

Décomposition faible et mesures de mouvements de revenus

2.1 Introduction

Les mouvements de revenus sont une façon de concevoir un concept bien plus large qui se développe dans les années 70 : la *mobilité*. Ce terme de *mobilité* possède diverses définitions dans la littérature [voir entre autres, Atkinson, Bourguignon et Morrison (1992), Fields et Ok (1999a), Fields (2000) ou Jäntti et Jenkins (2013)]. Toutes convergent néanmoins vers une idée commune : il s'agit de décrire l'évolution au cours d'une période de temps donnée, de la situation économique (ou plus précisément des revenus) des individus. Selon Jäntti et Jenkins (2013) un élément fondamental au concept de mobilité est la période sur laquelle l'évolution des revenus est analysée. Se pose ensuite la question de l'existence d'un lien de parenté entre les individus dont le revenu est étudié sur plusieurs périodes de temps. S'agit-il des mêmes individus pour lesquels le revenu est considéré à différents stades de leur vie ? Ou s'agit-il d'individus différents mais partageant un lien de parenté et pour lesquels le revenu au temps t peut être conditionné par celui de leurs parents au temps $t-1$? Ces questions renvoient à une distinction couramment observée dans la littérature qui vise à séparer les cas de mobilité dite « intragénérationnelle », des cas de mobilité « intergénérationnelle ».

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans un cadre intragénérationnel. Nous nous intéressons principalement aux changements que subissent les revenus individuels au cours du temps et cherchons à en déterminer les causes. Nous nous éloignons donc du cadre univarié des inégalités de revenus pour nous placer dans un cadre plus large – essentiellement bivarié bien que généralisable à plusieurs périodes – permettant de tenir compte d'un espace-temps. L'ajout de cette dimension temporelle n'écarte pas pour autant les questions récurrentes du choix de l'indicateur et des propriétés que celui-ci doit satisfaire. Ces questions se révèlent d'autant plus complexes à traiter dans le cadre de la mobilité.[1] Avant de choisir un indicateur statistique, il nous faut déterminer ce que représente la mobilité : influence du temps, changement de position, inégalité permanente, mouvements directionnels, mouvements symétriques, *etc.* Chaque auteur a sa propre conception de la mobilité et sa propre classification des différentes notions qu'elle renferme [voir par exemple, Fields et Ok (1999a), Fields (2000, 2008), Jäntti et Jenkins (2013)]. Nous choisissons de nous référer à la classification proposée par Jenkins (2011a) qui distingue quatre concepts[2] couramment utilisés dans la littérature pour évaluer la mobilité : le changement positionnel ("*positional change*"), la réduction des inégalités de revenus à long terme ("*reduction of longterm inequality*"), le risque de revenu ("*income risk*") et la croissance des revenus individuels ("*individual income growth*")

1. Nous traitons également ces questions dans le cadre des inégalités au chapitre suivant.
2. Des interprétations en termes de politique économique peuvent également être rattachées à ces divers concepts ; se référer à Jäntti et Jenkins (2013, p. 12-19) pour une synthèse à ce sujet.

L'étude des **changements positionnels** nécessite de connaître la position (le rang) des individus au sein de leur distribution, au cours du temps. Largement utilisé dans la littérature sur la mobilité, il est parfois reproché à ce concept basé sur les matrices de transition d'entraîner une perte d'information [3] liée à la construction même de ces matrices. Les matrices de transition synthétisent l'ensemble des changements qui se produisent au sein des distributions au cours du temps. La perspective de l'application d'une décomposition en divers sous-groupes compatible avec cette approche de la mobilité peut être envisagée mais sera plutôt complexe à formaliser compte tenu des contraintes imposées par les matrices de transition. Il est en revanche possible de définir une nouvelle approche de la décomposition de la mobilité selon une composante de mobilité d'échange et une composante de mobilité structurelle comme nous l'expliquons plus en détail à la Section 2.3.1.

L'analyse de la **réduction des inégalités de revenus à long terme** comme celle du **risque de revenu**, conduisent toutes deux à la définition de composantes de mobilité permanente et transitoire. Ces composantes ont pour but de déterminer si la dispersion entre les individus s'est accrue ou non au cours du temps. En dépit de similitudes apparentes dans la construction de ces deux concepts, Jäntti et Jenkins (2013, p.11) insistent sur le fait qu'ils ne convergent pas nécessairement vers des résultats identiques. [4] Ces deux concepts offrent donc une approche intéressante et originale de la mobilité, néanmoins nous choisissons de concentrer nos recherches sur le quatrième et dernier concept de mobilité qui se prête bien à la décomposition en sous-groupes.

Dans le cadre de l'étude de la **croissance des revenus individuels**, la mo-

3. Cet argument est avancé par Fields et Ok (1999a, p. 566).

4. Dès lors que les niveaux individuels de composantes ne sont pas fixés, les résultats divergent.

bilité est captée à l'aide d'une mesure agrégée des changements de revenus affectant chacun des individus de la société au cours du temps. Ce concept est principalement développé par Fields et Ok (1996, 1999a, b) qui qualifient ces changements de revenus agrégés de *mouvements de revenus*. Des fonctions distances ainsi que des matrices de mobilité sont construites pour mesurer la croissance des revenus. Contrairement aux matrices de transition, les éléments des matrices de mobilité sont définis en termes de revenus réels. Le recours à des fonctions distances donne un aperçu rapide de l'ampleur des mouvements de revenus au sein d'une distribution. Plus la distance entre les revenus individuels de la période initiale et ceux de la période finale est grande, plus les mouvements de revenus sont importants. L'accent est mis sur la distance euclidienne dont les propriétés sont analysées par D'Agostino et Dardanoni (2009). Enfin, une distinction s'opère selon que la fonction distance est sensible au sens du mouvement (directionnelle) ou non (symétrique). L'idée de croissance des revenus est alors assimilée à une situation dans laquelle les mouvements de revenus positifs sont majoritaires. A l'inverse, la prépondérance des mouvements de revenus négatifs sont représentatifs d'une contraction de l'économie. Ce dernier concept va donc nous permettre d'élargir la portée de la propriété de décomposition en sous-groupes.

Comme nous l'avons évoqué au cours du précédent chapitre, l'emploi d'une propriété de décomposition en sous-groupes permet de distinguer les écarts de revenus observés entre des individus partageant une caractéristique socioéconomique commune de ceux observés entre des individus qui ne la partage pas. Une telle procédure fournit ainsi des informations sur les causes éventuelles de ces écarts. Ces informations peuvent par la suite être utilisées comme moyens d'action par les décideurs politiques dans le but d'améliorer la situation économique. Pour adapter cette propriété aux diverses mesures de mobilité, plusieurs approches sont adoptées. Un certain nombre d'auteurs choisissent notamment de se conformer aux propriétés préexistantes dans des domaines connexes tel que le principe de la décomposition additive développé par Shorrocks (1980, 1984) en économie des inégalités ou celui de Foster *et al.* (1984) appliqué à la pauvreté. Tout en s'inspirant des travaux antérieurement réalisés sur le sujet, de nouvelles propriétés conduisant parfois à des procédés de décomposition plus larges que ceux reposant sur la définition de sous-groupes sont également envisagées.

Tout au long de ce chapitre, nous démontrons que le champ d'application de la propriété de décomposition faible en sous-groupes axiomatisée par Ebert (2010) ne se limite pas aux seules mesures d'inégalités du revenu. Cette propriété se révèle en effet parfaitement compatible avec le concept de croissance des revenus individuels et plus largement avec celui de mouvements de revenus. L'introduction d'une telle propriété nous permet d'élargir le concept de mouvements de revenus à l'ensemble des individus d'une distribution étudiée sur plusieurs périodes. Nous considérons que les mouvements de revenus ne sont pas uniquement de nature personnelle et proposons de prendre également en compte les mouvements interpersonnels de revenus. Nous supposons que pour juger de l'évolution de son revenu au cours du temps, un individu ne se contente pas de comparer le montant de revenu qu'il détient aujourd'hui avec celui qu'il détenait hier, comme le suggèrent notamment Fields et Ok (1999a, b) ; il compare également le montant de revenu qu'il détient aujourd'hui à celui que détenait hier le reste de la société à laquelle il appartient. Les pertes et les gains de chaque individu sont ainsi mis en perspective, de manière à ce que chaque individu puisse prendre conscience de sa situation économique personnelle à un instant précis tout en ayant connaissance de la situation économique des autres individus à une période antérieure. De ces comparaisons interpersonnelles, découle un sentiment de satisfaction (ou au contraire d'insatisfaction) implicite qui va influer sur le comportement économique qu'un individu va choisir d'adopter à la période suivante : tenter d'augmenter son montant de revenu individuel ou simplement tenter de maintenir son niveau constant, tout va alors dépendre des objectifs personnels de chacun. La définition explicite d'une composante intergroupe des mouvements basée sur des comparaisons interpersonnelles des revenus sur différentes périodes semble donc pertinente. Rappelons en effet que jusqu'alors, aucun schéma de décomposition en sous-groupes faisant clairement apparaître de composante de mouvements de revenus intergroupes n'a encore été proposé. En plus de nous permettre de mener une analyse plus fine des mouvements personnels et interpersonnels de revenus au sein et entre les sous-groupes, cette méthode de décomposition nous donne également la possibilité de définir une nouvelle classe de mesures qui comprend certains indicateurs bien connus de la littérature tels que la mesure agrégée des changements par tête en logarithme des revenus introduite par Fields et Ok (1999b).

Notre développement s'organise alors comme suit. Une première Section (2.2) est consacrée à l'étude des inégalités de croissance ajustée des revenus individuels[5] au sens de Demuynck et Van de gaer (2012). Nous montrons que contrairement à ce qu'avancent les auteurs, les mesures de Gini peuvent être décomposées en sous-groupes dans un contexte de mobilité, de la même manière qu'elles le sont dans un contexte d'inégalité de revenus. Nous reprenons pour cela les travaux de Demuynck et Van de gaer (2012) que nous combinons à ceux d'Ebert (2010) et Chakravarty *et al.* (2013) pour proposer une réécriture des indices dérivés de la famille $S-$Gini. Cette réécriture satisfait la propriété de décomposition faible d'Ebert et permet d'identifier les groupes dans lesquels les inégalités de croissances sont les plus importantes. Dans la Section suivante (2.3), nous nous intéressons aux mesures de mouvements directionnelles. L'emploi de telles mesures donne la possibilité de distinguer ce que Maasoumi et Zandvakili (1986) et Maasoumi (1998) qualifient de « bons » mouvements (synonymes d'une hausse des revenus individuels au cours du temps) des « mauvais ». Au cours de notre analyse, nous modifions l'énoncé

5. "*Inequality adjusted income growth*"

de la propriété de décomposition faible en sous-groupes d'Ebert (2010) pour formuler une propriété de décomposition mieux adaptée aux mesures de mouvements. Au-delà de l'analyse des mouvements dans les différents sous-groupes qu'offre toute propriété de décomposition (en sous-groupes), notre propriété nous permet d'introduire l'idée selon laquelle les mouvements de revenus ne se limitent pas à une seule et même personne, ils peuvent également s'opérer entre des individus différents. Nous qualifions alors ces mouvements de *mouvements interpersonnels de revenus* et définissons la classe générale des mesures de mouvements *interpersonnellement décomposables en sous-groupes*.

Chaque section s'accompagne d'un exemple illustratif réalisé à partir de données issues de l'enquête britannique BHPS sur les variables de revenus nets courants et annuels des ménages. [6] L'enquête BHPS est une enquête annuelle. Elle se présente sous la forme de 18 vagues couvrant la période 1991-2008. La collecte des données pour constituer l'échantillon de la première vague d'enquête a lieu entre le 1^{er} septembre 1991 et le 31 décembre 1991. Les ménages sondés sont choisis [7] à partir de leur adresse postale. Il s'agit de ménages privés [8] dont la résidence principale est localisée soit en Angleterre, soit au Pays de Galles, soit en Écosse au sud du Canal Calédonien [9]. Chacun des individus de ces ménages âgés de plus de 16 ans sont invités à participer à l'enquête. Tout individu ayant accepté de prendre part à l'enquête est répertorié et enregistré comme membre de référence appartenant à l'échantillon dit « d'origine » [" *Original Sample Members* (OSMs)"]. Il est alors suivi et réinterrogé au cours

6. British Household Panel Survey Derived Current and Annual Net Household Income Variables : http://dx.doi.org/10.5255/UKDA-SN-3909-2.

7. La sélection se fait à l'aide de méthodes équiprobables de clusterisation et stratification, voir Jenkins (2010a, p.2).

8. Les individus résidant dans des camps militaires, maisons de retraite, résidences universitaires ou sans domicile fixe ne sont pas concernés par cette enquête.

9. Selon Jenkins (2010a), le Canal Calédonien traverse également le nord de l'Ecosse mais la densité de population y est trop faible pour être inclus dans l'enquête.

des années successives qui constituent les différentes vagues de l'enquête.

Au total l'enquête porte sur 8 167 adresses postales qui représentent plus de 5 000 ménages, soit environ 10 000 individus. La situation personnelle de chaque individu du ménage est suivie attentivement. Par exemple, si des individus se séparent de leur ménage d'origine (enregistré lors de la vague 1) pour former un nouveau ménage avec d'autres individus, l'enquête est proposée à l'ensemble des individus de plus de 16 ans de ce nouveau ménage. De la même façon, lorsque les enfants d'un ménage atteignent la majorité, ils peuvent à leur tour se joindre à l'enquête. Les décès, naissances, divorces et autres changement d'ordre personnel affectant chaque membre permanent de l'enquête sont pris en compte. Ces ajustements au cours du temps permettent, comme l'expliquent Taylor *et al.* (2010), d'obtenir des échantillons représentatifs de la population de Grande Bretagne. A partir de la vague 9, l'enquête est élargie à l'ensemble du territoire du Royaume-Uni (c'est-à-dire, Grande Bretagne et Irlande du Nord).

Le temps est un facteur important pour l'étude des mouvements de revenus. Il est souvent reproché aux applications de porter sur des périodes d'études trop courtes [voir entre autres, Jarvis et Jenkins (1998), Ramos (1999), Dickens (2000), Jäntti et Jenkins (2013)]. Nous choisissons donc de privilégier une période d'étude de 18 ans à un nombre d'observations plus important afin d'analyser les mouvements de revenus dans un contexte intragénérationnel.

2.2 Une approche dynamique des inégalités de croissance ajustée des revenus au sens de Demuynck et Van de gaer (2012)

Il existe différentes approches pour mesurer la croissance des revenus dans un cadre d'étude dynamique. L'approche que nous adoptons dans cette Section est intrinsèquement liée à la mesure des inégalités. Nous nous intéressons à ce que Demuynck et Van de gaer (2012) qualifient d'*inégalité de croissance ajustée des revenus*. En reprenant les travaux de ces auteurs et en nous appuyant sur les résultats présentés dans le chapitre précédent, nous montrons que contrairement à ce qu'avancent Demuynck et Van de gaer (2012), l'indice de Gini absolu − lorsqu'il est employé comme mesure d'inégalités de croissance ajustée des revenus− conserve bien sa propriété de décomposition en sous-groupes. [10]

Après avoir rappelé les enjeux que représente l'approche de Demuynck et Van de gaer (2012) pour l'analyse des mouvements dans une première section, nous présentons notre travail de caractérisation. Il est en effet nécessaire d'adapter la structure de l'indice de Gini afin qu'elle soit compatible avec la propriété de décomposition faible d'Ebert (2010) dans un contexte de mobilité, comme nous l'expliquons dans la seconde section. L'indice de Gini ainsi redéfini est finalement appliqué à un échantillon de données issu de l'enquête longitudinale BHPS. Au cours de cette illustration qui fait l'objet d'une dernière section, nous étudions les inégalités de croissance ajustée des revenus en fonction de la

10. Demuynck et Van de gaer (2012) font référence à une forme forte dérivée de la décomposition additive en sous-groupes de Bourguignon (1979) et Shorrocks (1980) pour laquelle la structure de l'indice de Gini est incompatible.

situation familiale des ménages de Grande Bretagne entre 1991 et 2008.

2.2.1 Les enjeux de cette nouvelle approche

Comment évaluer la croissance à un niveau microéconomique ? S'il ne fait aucun doute qu'un bon indicateur de croissance doit intégrer une dimension temporelle, la notion de croissance qu'un tel indicateur doit refléter, diffère là encore selon les auteurs. Lorsqu'il est question de croissance de revenus, l'indicateur peut se baser, soit sur la croissance dans la moyenne des revenus, [11] soit sur la croissance des revenus individuels. Inspirés des récentes recherches sur le bonheur menées par Clark *et al.* (2008), Demuynck et Van de gaer (2012) assimilent la croissance du revenu individuel à un indicateur de bien-être individuel. En associant les notions de bonheur et de croissance, les auteurs présentent une nouvelle caractérisation axiomatique des indicateurs absolus de type *Single-parameter Gini* ($S-$Gini) en se basant sur les fonctions d'évaluation sociale de Gini, comme cela a été initialement proposé par Donaldson et Weymark (1980) :

$$G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n^\delta} \sum_{i=1}^{n} [i^\delta - (i-1)^\delta] \; \tilde{g}_i \quad \text{avec} \quad \delta \geqslant 1, \tag{D\&VdG}$$

où $G_n : \mathbb{R}^{2n}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ avec $\mathbf{x}$ (resp. $\mathbf{y}$) la distribution de revenus en période initiale (resp. finale). δ représente un paramètre de sensibilité aux écarts de revenus tel que $\delta \geqslant 1$. $\tilde{g}_i$ est une permutation des éléments du vecteur $\boldsymbol{g}$ de croissance des revenus individuels, telle que : $\tilde{g}_1 \geqslant \tilde{g}_2 \geqslant \ldots \geqslant \tilde{g}_n$, afin que les taux de croissance les plus faibles bénéficient des plus fortes pon-

11. Voir entre autres, Ahluwalia et Chenery (1974), Klasen (1994) ou Palmisano et Van de gaer (2013) pour des commentaires et détails.

dérations. [12]

L'idée motrice est de pouvoir donner davantage de poids aux individus qui font l'expérience de faibles taux de croissance. L'indicateur G_n mesure l'inégalité au sein de la distribution des taux de croissance de revenus individuels. La croissance agrégée des revenus est alors définie comme une moyenne des taux de croissance des revenus individuels dépendant du rang. Les facteurs de pondération sont affectés selon les rangs des individus. L'indicateur G_n intègre de plus des paramètres de sensibilité dans sa structure (δ et r) qui expriment l'aversion pour les inégalités de croissance de revenus d'un décideur. De cette façon, Demuynck et Van de gaer (2012) postulent que la croissance agrégée des revenus ne peut augmenter que si la croissance est redistribuée des individus faisant l'expérience de forte croissance de revenus vers les individus dont la croissance de revenus est plus faible, sur une période donnée. La formalisation d'un tel concept visant à accorder davantage de poids à une certaine partie de la population découle des travaux d'Ebert (1988), Bossert (1990) ou encore Lambert (2001).

En 1990, Bossert introduit une propriété d'agrégation spécifique aux indicateurs de type $S-$Gini. Cette propriété permet d'évaluer les inégalités [ou par dualité le bien-être] au sein des groupes dans lesquels les revenus sont les plus faibles [resp. plus élevés], sans tenir compte des revenus dans les autres groupes ("*Low* [*resp. High*] *Income Group Aggregation Property*" (LIGAP) [resp. (HIGAP)]). L'énoncé de cette propriété [13] dans un univers statique est

12. Comme cela est expliqué par la suite, deux formes fonctionnelles peuvent être envisagées pour gi : soit $gi = (y_i/x_i)^r$, soit $g_i = r\ln(y_i/x_i)$, avec $r > 0$.

13. Bossert démontre que cette propriété est impliquée par la condition d'agrégation restreinte utilisée par Ebert (1988) dans sa caractérisation des $S-$Gini [voir Bossert (1990), p. 90].

formulé en fonction du revenu équivalent également distribué[14] $\Xi_n(\mathbf{x})$, tel que $\Xi_n : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ et requiert que la fonction d'évaluation sociale soit strictement récursive [voir Bossert (1990), p. 87 ainsi que Blackorby, Primont et Russel (1978), Chap. 6,7].

Axiome 2.2.1 – Agrégation des bas niveaux de revenus –(LIGAP). *Une séquence de fonctions d'évaluation sociale $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la propriété d'agrégation des bas niveaux de revenus si et seulement si :*

$$\Xi_{n+1}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n+1}) = \psi_{n+1}(\Xi_n(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n), \hat{x}_{n+1})$$

où $\hat{\mathbf{x}}$ représente la distribution des permutations de revenus classées par ordre croissant, telle que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $\psi_{n+1} : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$.

Dans le cas des hauts niveaux de revenus (HIGAP), la fonction d'agrégation se calcule à partir de la distribution des permutations de revenus classées par ordre décroissant : $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Plutôt que de recourir à une propriété d'agrégation dans un cadre dynamique, Demuynck et Van de gaer (2012) définissent une propriété de séparabilité : la décomposition par le respect des plus hauts niveaux de croissance[15] (D-HG). Cette règle de décomposition s'inspire à la fois de (LIGAP) et de la propriété d'indépendance par rapport aux classements des vecteurs de revenus[16] utilisée par Ebert (1988) – qui n'est autre qu'une propriété de séparabilité stricte.

14. "*equally-equivalent-distirbuted income*" voir Donaldson et Weymark (1983), p. 354.
15. "*Decomposability with respect to highest growth*", Demuynck et Van de gaer (2012), p. 753.
16. "*Independence with Respect to Ordered Vectors*" Ebert (1988), p. 149.

Axiome 2.2.2 – Décomposition par le respect des plus hauts niveaux de croissance –(D-HG). *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $\mathbf{g}, \mathbf{g}' \in \mathbb{R}^n$*, si :*

$$\begin{aligned} W_{n-1}(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_{n-1}) = W_{n-1}(\tilde{g'}_1, \ldots, \tilde{g'}_{n-1}) \quad et \quad \tilde{g}_n = \tilde{g'}_n \ , \\ alors, \quad W_n(\mathbf{g}) = W_n(\mathbf{g}') \ ; \end{aligned} \tag{D-HG}$$

avec $W_n(\mathbf{g}) = G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *une fonction continue et strictement croissante qui représente la mesure de croissance de revenu agrégée.*

Contrairement à ce que la dénomination de cette propriété pourrait laisser penser, il s'agit bien de cibler les individus dont les taux de croissance sont les plus faibles. Tout se passe comme si les niveaux de croissance individuels les plus faibles pouvaient être évalués indépendamment des niveaux de croissance des autres individus. D'après (D-HG), si deux distributions de même taille reflètent le même niveau de croissance globale – déterminé à partir des $n-1$ taux de croissance les plus élevés – le fait d'intégrer le niveau de croissance le plus faible d'un $n^{ième}$ individu ne modifie pas l'égalité. En d'autres termes, la mesure de croissance globale se décompose d'une part, en une composante mesurant les niveaux de croissance individuels les plus faibles et d'autre part, en une composante synthétisant les niveaux de croissance des autres individus de la distribution. Demuynck et Van de gaer considèrent que leur méthode de décomposition est plus faible que la plupart des axiomes de décomposition proposés dans la littérature sur la mobilité.[17] Pour compléter les propriétés normatives de l'indicateur $S-$Gini dans un contexte de croissance des revenus, les auteurs définissent une règle d'allocation de croissance additionnelle. Basée sur les principes de redistributions bien connus de la littérature sur

17. Ils font notamment référence aux axiomes de décomposition faible de Fields et Ok (1996, 1999b), l'axiome de cohérence en population de Mitra et Ok (1998), l'axiome de cohérence en sous-groupes de Schluter et Van de gaer (2011) ou encore celui de cohérence en sous-vecteur de D'Agostino et Dardanoni (2009b) [voir Demuynck et Van de gaer, 2012 p. 753].

les inégalités, Demuynck et Van de gaer (2012) instaurent un principe de priorité pour les faibles niveaux de croissance ("*priority for lower growth*" (PLG)).

Axiome 2.2.3 – Priorité pour les faibles niveaux de croissance – (PLG). *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ *et* $\sigma > 0$, *si* $g_i < g_j$, *alors :*

$$W_n(g_1, \ldots, g_i + \sigma, \ldots, g_j, \ldots g_n) \geqslant W_n(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_j + \sigma, \ldots g_n) \quad \text{(PLG)}$$

où $\sigma > 0$ *représente un incrément (c-à-d., un montant de croissance additionnel).*

Ce principe n'est pas sans rappeler le principe de transfert de Pigou et Dalton, exprimé en termes de fonctions d'évaluation sociales. L'axiome (PLG) établit en effet, qu'une mesure de croissance agrégée est plus élevée lorsque l'allocation de croissance additionnelle est attribuée à l'individu dont le niveau de croissance est le plus faible. En assortissant les deux propriétés précédemment évoquées à des conditions plus basiques, telles que l'invariance par translation, l'invariance d'échelle, l'invariance par réplication, la monotonicité ainsi qu'à des conditions d'indépendance spécifiques [notées (MPI) et (API)] que nous présentons formellement à la section 2.2.2, Demuynck et Van de gaer (2012) définissent deux formes fonctionnelles pour leur mesure d'inégalités de croissance de revenus :

$$G_n^{\mathrm{MPI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n^\delta} \sum_{i=1}^{n} [i^\delta - (i-1)^\delta] \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^r ;$$

tel que $\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^r \geqslant \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^r$, avec $r > 0$.

Le paramètre r représente l'aversion pour les inégalités de croissance de revenus d'un décideur, tandis que le paramètre δ influe directement sur le poids qui est accordé aux différents niveaux de croissance. Lorsque $\delta \longrightarrow \infty$ tout se passe comme si seules les comparaisons entre les plus faibles niveaux de croissance avaient de l'importance [voir Demuynck et Van de gaer (2012)]. Les mesures $S-$Gini de la forme G_n^{MPI} satisfont une propriété d'indépendance de nature multiplicative : "*multiplicative path independence*" (MPI). Cette condition (au même titre que la condition d'indépendance additive (API)) a pour but de décrire les transformations des revenus au cours du temps afin de fournir une meilleure compréhension du phénomène de croissance observé. Pour toute mesure respectant (MPI), la croissance individuelle, sur la période d'étude globale, résulte du produit des mesures de croissance individuelles sur chaque sous-période. Autrement dit, le schéma de décomposition entre les sous-périodes est multiplicatif. Plus particulièrement, ces mesures constituent une généralisation d'un cas particulier de mesures de mobilité proposées par Schluter et Van de gaer (2011) :

$$G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{y_i}{x_i}\right)^{r-1}}_{\text{poids}} \left(\frac{y_i}{x_i}\right) \;, r > 0 \qquad \text{(S \& Vdg)}$$

Il est, en effet, possible de retrouver ces indicateurs de mobilité en imposant $\delta = 1$. C'est donc l'intensité du paramètre de sensibilité r qui influe sur le poids accordé aux changements de revenus. Schluter et Van de gaer (2011) indiquent alors que, lorsque $r \in]0; 1[$ (resp. $r \in]1; \infty[$) un poids de plus en plus important (resp. faible) est accordé aux faibles changements de revenus. *A contrario*, si $r = 1$ aucune distinction ne s'opère dans l'appréciation des changements de revenus (un poids identique et de valeur unitaire est attribué à chacun des individus). La seconde forme fonctionnelle mise en avant par Demuynck et Van de gaer (2012), est une généralisation des mesures de mouvements[18] de Fields et Ok (1999b) :

18. L'examen des mesures de mouvement de Fields et Ok (1999b) obtenues lorsque $\delta = 1$ fait l'objet de notre second paragraphe.

$$G_n^{\text{API}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n^\delta}\sum_{i=1}^{n}[i^\delta - (i-1)^\delta]\ r \cdot \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \ ;$$

tel que $r > 0$ et $\ln\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \geqslant r \ln\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$, avec $r > 0$ et $\delta \geqslant 1$.

Les inégalités de croissance ajustée des revenus évaluées par G_n^{API} sont caractérisées par une propriété d'indépendance de nature additive : "*additive path independance*" (API). Cette propriété indique que la croissance individuelle sur la période globale s'obtient en ajoutant les mesures de croissance du revenu individuel de chaque sous-période. La mesure individuelle de croissance du revenu sur chacune des sous-périodes est alors considérée comme additivement séparable.

Les généralisations des mesures de Fields et Ok (1999b) [G_n^{API}] ou de Schluter et Van de gaer (2011) [G_n^{MPI}] précédemment exposées, présentent l'avantage de pouvoir tenir compte de différents degrés de sensibilité aux inégalités de croissance (δ ou r) exprimés par un décideur. Leur formulation dépendant du rang, elles ne sont, par conséquent, plus compatibles avec le principe de décomposition additive en sous-groupes (y compris lorsque $\delta = 1$). L'outil de décomposition en sous-groupes offre cependant de meilleurs perspectives d'analyse que les études réalisées au niveau global. Il permet, notamment, de déterminer s'il existe un facteur commun entre les individus qui connaissent les plus faibles niveaux de croissance de revenus sur un intervalle de temps. L'ensemble des mesures de la famille des $S-$Gini ne peut cependant pas être soumis à un même procédé de décomposition. Au cours de ce paragraphe, nous nous intéressons uniquement au mesures de la classe des $S-$Gini correspondant à un décideur dont le degré d'aversion pour les inégalités de croissance est $\delta = 2$, tel que :

$$G_n^{\text{MPI}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}[2i-1]\ \left(\frac{y_i}{x_i}\right)^r \ ;$$

et,

$$G_n^{\mathrm{API}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}[2i-1]\ r \cdot \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right).$$

avec $r > 0$ et $\frac{y_1}{x_1} \geqslant \ldots \geqslant \frac{y_n}{x_n}$.

En fixant $\delta = 2$,[19] nous retrouvons de le schéma de pondération propre à celui de l'indicateur de Gini (absolu) standard. Pour la suite de nos développements, nous raisonnons par dualité en termes de mesure d'inégalités et non plus en termes de mesure de bien-être social. Par définition, la structure de l'indicateur de Gini (absolu) est compatible avec la propriété de décomposition faible en sous-groupes d'Ebert (2010). Nous montrons alors, en nous appuyant sur nos résultats présentés au Chapitre 1, que la structure de ces mesures – employées dans un contexte d'inégalité de croissance – reste cohérente avec la propriété de décomposition faible (DEC), pour tout $r > 0$. Nous caractérisons ainsi deux sous-classes de mesures d'inégalité de croissance (voir Section 2.2.2) qui nous permettent d'élargir le champ d'application de la décomposition faible en sous-groupes. Dans un objectif de croissance des revenus individuels, la portée ainsi que l'interprétation des actions de réallocation de croissance additionnelle restent limitées. Il n'est en effet pas désirable d'un point de vue économique, de ramener l'ensemble des niveaux de croissance des revenus individuels à un même niveau d'égalité. Ces nouvelles sous-classes de mesures présentent cependant l'avantage de permettre de distinguer – à l'aide de la propriété de décomposition faible en sous-groupes (DEC) – les écarts de niveaux de croissance de revenus observés entre des individus appartenant à un même groupe, de ceux observés entre des individus de groupes distincts. Cette distinction est d'autant plus importante que la littérature actuelle sur la mobilité accorde assez peu d'attention aux interactions individuelles et à leur répercutions sur

19. Pour toute autre valeur de δ nous obtenons des indicateurs dont la structure n'est pas compatible avec la propriété de décomposition faible en sous-groupe. Seul le cas $\delta = 2$ est donc examiné en détails ici.

les niveaux de revenus. Car, si la croissance des revenus est généralement perçue comme un phénomène à caractère personnel ne nécessitant pas le concours d'autrui, les inégalités de croissance découlent, quant à elles, de l'évaluation de l'ampleur des écarts de niveaux de croissance de revenus entre les individus d'une même société. Une analyse de ces disparités sur différentes partitions de population semble donc toute indiquée.

2.2.2 Une caractérisation basée sur l'axiome (DEC) d'Ebert (2010)

La famille des indicateurs de Gini est une des familles de mesures qui possèdent la particularité de pouvoir être appliquées à de multiples domaines de recherche. L'économie de la santé, de la pauvreté, de la ségrégation, de l'éducation, ou encore des inégalités (unidimensionnelles ou multidimensionnelles), sont autant de champs de recherche pour lesquels des mesures issues de la famille de Gini sont proposées. Dès lors que la forme ou le classement de la distribution peut avoir une influence sur la mesure de bien-être recherchée, l'emploi d'un indicateur de la famille de Gini peut être envisagé. L'adaptation de ces mesures à un contexte de croissance de revenus semble donc appropriée.

Des propositions d'adaptations sont notamment formulées par Gruen et Klasen (2008), Jenkins et Van Kerm (2011), ou Palmisano et Van de gaer (2013). Dans cette Section, nous nous focalisons sur le travail de caractérisation axiomatique. Nous montrons, qu'en remplaçant les axiomes (D-HG) et (PLG) par des axiomes plus traditionnels dans le domaine des inégalités de revenus, nous caractérisons une famille de mesures d'inégalités de croissance (ajustée) décomposables en sous-groupes. Nous construisons nos mesures à partir du schéma de pondération de l'indice de Gini (absolu) standard, néanmoins contrairement à Demuynck et Van de gaer (2012), nous n'explicitons pas les rangs des individus. [20] Nous conservons en revanche le paramètre de sensibilité r introduit par ces auteurs dans le but d'accorder davantage de poids aux plus faibles taux de croissance ajustée. Ce paramètre nous permet notamment de moduler la structure de nos indicateurs et de retrouver l'expression de l'indice de Gini (absolu) standard lorsque $r = 1$ et que (MPI) est requis. [21] Dans un contexte d'inégalité de croissance de revenus, l'emploi de la méthode de décomposition faible nous permet d'identifier les sous-groupes dans lesquels les inégalités de croissance ajustée sont les plus fortes. La nature intra- ou intergroupe des inégalités de croissance ajustée se dessinent en effet très nettement, ce qui facilite l'interprétation et la compréhension des coefficients obtenus. Pour aboutir à une telle famille de mesures, nous invoquons un premier résultat apporté par Demuynck et Van de gaer (2012). Ce premier résultat définit la mesure de la croissance ajustée de revenus individuels au sens de ces auteurs. Nous complétons, ensuite, ce résultat en reprenant la démarche de Chakravarty, Chattopadhyay et D'Ambrosio (2013) dans leurs récents travaux visant à définir une famille d'indices d'inégalité d'accomplissement et d'échec ("*achievement and shortfall inequality indices*").

Tout d'abord, nous commençons par définir le cadre dans lequel nous nous plaçons. Les propriétés rattachées à une mesure de croissance ajustée des revenus

20. Nous généralisons l'expression empruntée par Morrisson (1986), Dagum (1997b) et bien d'autres.

21. La portée bien-êtriste de nos mesures reste cependant limitée. Il est, en effet, difficilement concevable de suggérer la mise en place d'actions de réallocation de croissance additionnelle en fonction de la valeur de r, un objectif de croissance de revenus égalitaire pour chacun des individus d'une même société n'étant pas souhaitable d'un point de vue économique. Nous n'accordons par conséquent que peu d'attention à ce paramètre de sensibilité r et insistons principalement sur la propriété de décomposition en sous-groupes que satisfait l'ensemble de nos mesures.

individuels au sens de Demuynck et Van de gaer (2012) sont brièvement rappelées, afin de pouvoir ensuite présenter la structure des mesures d'inégalité de croissance (ajustée) décomposables en sous-groupes. Nous considérons une population de n individus indicés par i tels que $i \in \{1, \ldots, n\}$. Au cours de notre développement nous travaillons essentiellement sur deux périodes. Soient $\mathbb{R}^n_{++}$ et $\mathbb{R}^n_{+}$ les ensembles des réels strictement positifs et non-négatifs de dimension n. La distribution de revenus en période initiale est $\mathbf{x}$, et celle de la période suivante (généralement associée à la période finale) est $\mathbf{y}$, avec $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$. Pour les besoins de certaines propriétés la durée d'analyse peut être étendue à 3 périodes. Auquel cas, la distribution de revenus en troisième période se note $\mathbf{z}$ avec $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n_{++}$. Nous considérons que la mesure agrégée de croissance ajustée des revenus individuels est une **fonction continue** à valeurs réelles $G_n : \mathbb{R}^{2n}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_{+}$. Soit $x_i \in \mathbb{R}_{++}$ [resp. $y_i \in \mathbb{R}_{++}$] le revenu initial [resp. final] de l'individu i. La mesure de croissance ajustée des revenus individuels se note alors $G_1(x_i, y_i)$. Au cours de notre caractérisation, les mesures de croissance ajustée des revenus individuels peuvent être regroupées au sein d'un même vecteur de croissance (ajustée) individuelle $\boldsymbol{g}$ tel que $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n)$ avec $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Dans les lignes qui suivent, nous rappelons les quelques propriétés nécessaires à la présentation du premier résultat introduit par Demuynck et Van de gaer (2012). La première condition est une condition de base qui va généralement de pair avec celle de continuité. Elle assure que les mesures de croissance ajustée des revenus individuels sont croissantes en période finale. Autrement dit, la croissance n'est constatée que lorsque le revenu d'un individu en période finale excède le montant de revenu de ce même individu en période initiale.

Axiome 2.2.4 – Monotonicité –(MN). *Pour tout* $x, y, x', y' \in \mathbb{R}_{++}$*, si*

$x \leqslant x'$ et $y \geqslant y'$, alors,

$$G_1(x,y) \geqslant G_1(x',y) \quad et \quad G_1(x,y) \geqslant G_1(x,y'). \tag{MN}$$

La mesure de croissance ajustée des revenus individuels est insensible aux changements proportionnels de revenus au cours du temps. Il s'agit d'une condition usuelle en économie des inégalités, bien qu'elle fasse parfois débat. Son emploi ici, se justifie principalement par les facilités calculatoires qu'elle peut offrir lorsqu'elle est combinée avec d'autres propriétés, comme nous l'évoquons par la suite.

Axiome 2.2.5 – Invariance d'échelle –(SI). *Pour $x, y \in \mathbb{R}_{++}$ et $\lambda > 0$:*

$$G_1(x,y) = G_1(\lambda x, \lambda y). \tag{SI}$$

Pour finaliser la structure de leur mesure de croissance ajustée des revenus individuels Demuynck et Van de gaer (2012) font appel aux deux propriétés d'indépendance (MPI) et (API) mentionnées précédemment.

Axiome 2.2.6 –Indépendance multiplicative–(MPI). *Pour $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$,*

$$G_1(x,z) = G_1(x,y) \cdot G_1(y,z). \tag{MPI}$$

Axiome 2.2.7 –Indépendance additive–(API). *Pour $x, y, z \in \mathbb{R}_{++}$,*

$$G_1(x,z) = G_1(x,y) + G_1(y,z). \tag{API}$$

Ces conditions d'indépendance fournissent des informations non négligeables sur les transformations subies par les revenus au cours du temps. De plus, elles sont parfaitement compatibles avec les conditions évoquées antérieurement.

Demuynck et Van de gaer (2012) définissent ainsi, au travers du Lemme 2.2.1, les deux formes fonctionnelles alternatives des indicateurs de croissance ajustée des revenus individuels.

Lemme 2.2.1 [Demuynck et Van de gaer (2012) p. 751]. *La mesure de croissance de revenus individuels $G_1(x, y)$ satisfait* (MN), (SI) *et* (API) [*resp.* (MPI)] *si et seulement si, il existe un paramètre $r > 0$ tel que $G_1(x, y) = r \ln y/x$ [resp. $G_1(x, y) = (y/x)^r$].*

Ces formes fonctionnelles sont bien connues de la littérature. Elles correspondent à des équations fonctionnelles de Cauchy ou Sincov [voir Aczél (1966)]. La croissance ajustée des revenus est évaluée sur la base de transformations mathématiques simples en logarithme ou quotient. Ces transformations s'appliquent pour chacun des n individus de la distribution. Il nous reste donc à préciser la procédure d'agrégation − ou plus exactement de désagrégation − des différentes mesures de croissance ajustée des revenus individuels. A ce stade de notre développement, il s'agit d'invoquer une propriété qui permette de transposer le cadre d'étude bidimensionnel à un cadre unidimensionnel. Pour ce faire, nous faisons appel à une propriété de décomposition faible (WD) utilisée par Fields et Ok (1996, 1999a).

Axiome 2.2.8 – Décomposition faible–(WD). *Pour $n \geqslant 2$ et tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$:*

$$G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H_n(G_1(x_1, y_1), \ldots, G_1(x_n, y_n)) ,$$

avec $H_n : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction non nulle et continue.

Cette propriété[22] établit que la mesure d'inégalité de croissance ajustée des revenus globale $(G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ est une fonction des mesures de croissance (ajustée)

22. Nous revenons plus en détail sur cette propriété dans la section 2.3.1.

individuelles $(G_1(x_i, y_i))$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il s'agit d'une forme plus faible que la propriété de décomposition utilisée par Demuynck et Van de gaer (2012). La règle de désagrégation invoquée par ces auteurs se veut en effet plus contraignante en imposant une relation d'ordre[23] supplémentaire, non nécessaire à notre caractérisation. L'emploi de la propriété (WD) énoncée ci-dessus nous permet cependant de parvenir à un résultat analogue à celui de Demuynck et Van de gaer (2012). En invoquant (WD), nous posons $g_i := G_1(x_i, y_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, tel que g_i représente la mesure de croissance ajustée des revenus de l'individu i. Ce changement de variable nous permet d'écrire la mesure d'inégalité de croissance (ajustée) globale comme :

$$G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H_n(\mathbf{g}), \tag{CWG}$$

avec $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n)$ le vecteur de croissance ajustée des revenus individuels.

Notons, que le domaine de définition de H_n (ou plus spécifiquement celui de $\boldsymbol{g}$) dépend de la forme fonctionnelle que nous retenons, comme le précisent Demuynck et Van de gaer (2012). L'indice de Gini tolérant les valeurs négatives, nous pourrions envisager de définir $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n / \{0\}$, quelle que soit l'expression sous-jacente de $G_1(x_i, y_i)$. Pour faciliter l'exposé des résultats, nous imposons $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^n_{++}$. Nous introduisons à présent la propriété de décomposition en sous-groupes suggérée par Ebert (2010). Pour adapter l'expression de cette propriété aux mesures de croissance (ajustée) individuelles, nous complétons les notations précédemment présentées. Nous supposons que la population globale se subdivise en 2 sous-groupes de taille respective n^1 et n^2 avec $n = n_1 + n_2$. Le vecteur des mesures de croissance ajustée des revenus individuels du groupe 1 [resp. groupe 2] se note $\mathbf{g}^1 := (g^1_1, \ldots, g^1_{n_1})$ [resp. $\mathbf{g}^2 := (g^2_1, \ldots, g^2_{n_2})$]. Soit $\mathbf{1}_n$ le vecteur unitaire de dimension n tel que $\mathbf{1}_n := (1, \ldots, 1)$. Pour faire ressortir le lien avec la littérature sur les inégalités, nous gardons les notations d'Ebert

23. Demuynck et Van de gaer (2012) postulent que si pour tout $i \neq j$ $G_1(x_i, y_i) = G_1(x'_i, y'_i)$, alors $G_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant G_n(\mathbf{x}', \mathbf{y}')$ *ssi* $G_1(x_j, y_j) \geqslant G_1(x'_j, y'_j)$, avec $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{y}' \in \mathbb{R}^n_{++}$.

(2010). La mesure d'inégalité de croissance (ajustée) globale se note par conséquent, $H_n(\mathbf{g}) \equiv H(\mathbf{g}, n)$.

Axiome 2.2.9 – Décomposition faible en sous-groupes –(DEC). *Pour tout $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$, où $n_1 \geqslant 1$ et $n_2 \geqslant 1$, il existe des fonctions de pondérations strictement positives $\alpha^1(\boldsymbol{n})$, $\alpha^2(\boldsymbol{n})$ et $\beta(\boldsymbol{n})$:*

$$\begin{aligned} H(\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, n_1 + n_2) =& \alpha^1(\boldsymbol{n}) H(\mathbf{g}^1, n_1) + \alpha^2(\boldsymbol{n}) H(\mathbf{g}^2, n_2), \\ &+ \beta(\boldsymbol{n}) \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} H(g_i^1, g_j^2, 2). \end{aligned} \tag{DEC}$$

pour $\mathbf{g}^1 \in \mathbb{R}_{++}^{n_1}, \mathbf{g}^2 \in \mathbb{R}_{++}^{n_2}$ avec $n = n_1 + n_2$.

Le principe de cette décomposition reste identique à celui exposé au chapitre précédent dans un contexte d'inégalité de revenus. La mesure d'inégalités de croissance (ajustée) globale se décline en une composante d'inégalité de croissance (ajustée) intragroupe et une composante d'inégalité de croissance (ajustée) intergroupe. La composante intragroupe est constituée à partir de la somme pondérée des écarts de croissance (ajustée) des revenus calculés entre individus d'un même groupe, tandis que la composante intergroupe oppose les niveaux de croissance (ajustée) des revenus des individus de groupes différents. Notons que les fonctions de pondérations $\alpha^1(\boldsymbol{n})$, $\alpha^2(\boldsymbol{n})$ et $\beta(\boldsymbol{n})$ dépendent uniquement du vecteur des tailles des groupes $\boldsymbol{n}$, telles que n_1 ,$n_2 \geqslant 1$. Le recours à de telles fonctions de pondération n'est cependant pas réducteur puisque nous choisissons de privilégier les mesures d'inégalités de croissance ajustée absolues, au cours de notre approche. Le caractère absolu des mesures d'inégalité de croissance (ajustée) que nous recherchons est apporté par la propriété d'invariance par translation (INV). La mesure d'inégalité de croissance (ajustée) globale reste inchangée si un même montant de croissance additionnelle est accordé à chacun des individus de la distribution.

Axiome 2.2.10 – Invariance par translation –(INV). *Pour tout* $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$ *:*

$$H(\mathbf{g}, n) = H(\mathbf{g} + \varepsilon \cdot \mathbf{1}_n, n). \tag{INV}$$

Trois propriétés supplémentaires sont requises pour retrouver une forme fonctionnelle proche de celle de l'indicateur de Gini absolu standard. La mesure d'inégalité de croissance (ajustée) globale doit garantir un traitement impartial des individus. La mesure doit donc être symétrique : qu'importe l'ordre dans lequel les écarts de croissance ajustée des revenus des individus sont évalués, l'attention portée à ces écarts reste la même.

Axiome 2.2.11 – Symétrie –(SM). *Pour tout* $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *:*

$$H(\mathbf{g}, n) = H(\pi\mathbf{g}, n) \ ; \tag{SM}$$

pour toute matrice de permutations π *de dimension* $n \times n$.

La propriété suivante exprime simplement les conditions pouvant conduire à la conclusion qu'il y a absence d'inégalité au sein de la distribution de croissance ajustée des revenus. L'inégalité de croissance (ajustée) est nulle si et seulement si la distribution est égalitaire au cours du temps et peut se résumer à une constante $\xi \in \mathbb{R}_{++}$ pour chaque individu.

Axiome 2.2.12 – Normalisation –(NM). *Pour tout* $\xi \in \mathbb{R}_{++}$ *:*

$$H(\xi\mathbf{1}_n, n) = 0. \tag{NM}$$

Enfin, la mesure d'inégalités de croissance ajustée reflète le même niveau d'inégalités si la population est répliquée à l'identique un nombre fini de fois. Autrement dit, la mesure d'inégalité de croissance ajustée des revenus doit satisfaire l'invariance par réplication au sens de Dalton (1920).

Axiome 2.2.13 – Invariance par réplication –(PP). *Pour tout* $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et pour tout entier* $k \geqslant 2$ *:*

$$H(\mathbf{g}, n) = H(\mathbf{g}^{[k]}, kn) \ ; \tag{PP}$$

où $\mathbf{g}^{[k]} = (\underbrace{g_1, \ldots, g_1}_{k \ \ fois}, \ldots, \underbrace{g_n, \ldots, g_n}_{k \ \ fois})$.

En réunissant l'ensemble des conditions évoquées au cours de cette section nous obtenons les deux formulations alternatives des mesures d'inégalités de croissance ajustée des revenus. Tout dépend de la forme d'indépendance qui est invoquée pour décrire le phénomène de croissance (ajustée) individuelle. Lorsque la croissance (ajustée) est générée par un mécanisme additif, la classe de mesures se définie comme suit.

Proposition 2.2.1 *Une mesure d'inégalités de croissance ajustée des revenus satisfait* (MN), (SI), (API), (WD), (DEC), (INV), (SM), (NM) *et* (PP), *si et seulement si :*

$$G_n^{API}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r\left(\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\phi(|\ln(y_i/x_i) - \ln(y_j/x_j)|)\right) \ ,$$

pour $r > 0$ *et* $n \geqslant 2$, *avec* $\phi : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue telle que* $\phi(0) = 0$.

Preuve.

Supposons que $G_1(x, y)$ satisfait (MN), (SI) et (API). D'après Demuynck et Van de gaer (2012), les mesures de croissance ajustée individuelles sont entièrement caractérisées par le Lemme 2.2.1. En invoquant la propriété de séparabilité faible (WD), nous avons (CWG). La suite de la caractérisation découle alors directement des travaux d'Ebert (2010) et Chakravarty *et al.* (2013).

D'après le Théorème 1 d'Ebert (2010, p.99) nous savons que toute mesure respectant (DEC) et (PP) avec $H(\cdot, \cdot, 2)$ respectant (NM) s'écrit sous la forme :

$$H(\mathbf{g}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} H(g_i, g_j, 2) \ ,$$

pour tout $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $n \geqslant 2$.
Cette expression est ensuite complétée par Chakravarty *et al.* (2013, p. 5) qui introduisent (SM) et (INV) de manière à obtenir :

$$H(\mathbf{g}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(|g_i - g_j|) \ ,$$

avec $\phi : \mathbb{R}^n_{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que par (NM) $\phi(0) = 0$.
Le vecteur de croissance (ajustée) des revenus $\mathbf{g}$ satisfaisant (API), la mesure d'inégalité de croissance ajustée des revenus globale s'écrit finalement :

$$G_n^{\mathrm{API}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r \left(\frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(|\ln(y_i/x_i) - \ln(y_j/x_j)|) \right) \ .$$

□

En remplaçant (API) par (MPI) nous retrouvons, tout comme Demuynck et Van de gaer (2012), une seconde classe des mesures d'inégalité de croissance ajustée des revenus présentée ci-après.

Proposition 2.2.2 *Une mesure d'inégalités de croissance ajustée des revenus satisfait* (MN), (SI), (MPI), (WD), (DEC), (INV), (SM), (NM) *et* (PP), *si et seulement si :*

$$G_n^{MPI}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(|(y_i/x_i)^r - (y_j/x_j)^r|) \ ,$$

pour $r > 0$ *et* $n \geqslant 2$, *avec* $\phi : \mathbb{R}^n_{++} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une fonction continue telle que* $\phi(0) = 0$.

Preuve.
Supposons à présent que $G_1(x, y)$ satisfait (MN), (SI) et (MPI). En appliquant le même raisonnement que celui présenté dans la preuve de la Proposition 2.2.1, le résultat est immédiat :

$$H(\mathbf{g}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(|g_i - g_j|) \ ,$$

avec $\phi : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que par (NM) $\phi(0) = 0$. Puisque le vecteur de croissance (ajustée) des revenus $\mathbf{g}$ satisfait (MPI), alors :

$$G_n^{\mathrm{MPI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(|(y_i/x_i)^r - (y_j/x_j)^r|) \ .$$

□

Le principal atout de ces mesures est qu'elles possèdent une formulation simple, qui contrairement aux mesures proposées par Demuynck et Van de gaer (2012), sont compatibles avec la propriété de décomposition faible en sous-groupes. L'évaluation des inégalités de croissance ajustée des revenus individuels à l'intérieur et entre les différentes sous-partitions formées à partir d'une population donnée, offre généralement une meilleure appréciation de la situation économique. Une approche par la décomposition des inégalités de croissance (ajustée) intra- et intergroupes permet notamment d'identifier les sous-groupes dans lesquels les disparités sont les plus marquées. Chaque sous-groupe étant formé sur la base de critères socio-économiques prédéfinis, une fois les sous-groupes les plus inégalitaires en termes de croissance (ajustée) identifiés, il est alors plus aisé d'adapter les politiques d'actions qui devront être envisagées, en fonction des objectifs économiques que le gouvernement s'est fixé. Dans le paragraphe suivant, nous illustrons les apports que cette propriété de décomposition peut procurer dans le cadre d'une étude empirique. Nous utilisons nos indicateurs $G_n^{\mathrm{API}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $G_n^{\mathrm{MPI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ pour étudier les inégalités de croissance ajustée des revenus en fonction de la situation familiale des citoyens de Grande Bretagne entre 1991 et 2008.

2.2.3 Une illustration des inégalités de croissance en Grande Bretagne entre 1991 et 2008

"[...] *the issue isn't in fact whether the very richest person ends up becoming richer. The issue is whether the poorest person is given the chance that they don't otherwise have [...] the most important thing is to level up not level down.*" [Tony Blair, 2001, réponse formulée lors d'une interview diffusée par La British Broadcasting Corporation (BBC news). [24]]

Ces paroles prononcées par l'ancien premier ministre de Grande Bretagne, Tony Blair, justifient selon Jenkins et Van Kerm (2011) que l'étude de la croissance des revenus individuels soit considérée comme un problème de mobilité. S'agissant des mots prononcés par l'un des hommes politiques les plus influents de Grande Bretagne, il nous paraît opportun d'étudier les inégalités de croissance ajustée dans ce pays. Comme cela a été annoncé en introduction, nous utilisons les données issues de l'enquête longitudinale *Bristish Household Panel Survey* (BHPS) mises à notre disposition par l'Université d'Essex et l'ISER. [25] Notre variable d'étude est le taux de croissance (ajustée) des revenus des ménages. Pour calculer ce taux de croissance ajustée, nous considérons le revenu net annuel [26] des ménages. La définition de ces revenus découle directement des informations officielles publiées par le gouvernement du Royaume-Uni sur la

24. Source : Jenkins et Van Kerm (2011), p.2.
25. Institute for Social & Economic Research.
26. Parfois qualifié de revenu disponible des ménages. Des résultats quasi identiques doivent pouvoir être obtenus sur les revenus nets courants conformément à l'étude comparative de Böheim et Jenkins (2006).

distribution personnelle des revenus. Contrairement aux statistiques officielles de "*Low Income Dynamics* (LID)", la variable de revenu estimée par Jenkins et consorts inclut une déduction pour les taxes locales. En revanche les frais de logements ("*housing costs*") ne sont pas déduits de la variable de revenu net que nous utilisons, comme le précise le Tableau 2.1.

Une échelle d'équivalence est appliquée à la valeur des revenus nets des ménages que nous considérons pour notre étude. Il s'agit de l'échelle d'équivalence modifiée de l'Organisation du commerce et des Dépenses Économiques (OCDE), également adoptée par les organismes gouvernementaux britanniques chargés d'études statistiques. Les données ainsi transformées peuvent être comparées quelle que soit la composition des ménages, leur taille ou encore l'année auxquelles elles se rapportent. L'échelle d'équivalence inclut un indice de prix mensuel – calculé sans tenir compte des frais liés au logement – afin d'exprimer l'ensemble des revenus des ménages sur la base des prix pratiqués en Janvier 2010 [voir Jenkins et Levy (2012) pour plus de détails].

	(a) Rémunérations brutes de l'emploi
+	(b) Rémunérations des emplois subsidiaires
+	(c) Profits ou pertes d'un emploi indépendant
+	(d) Bénéfices de sécurité sociale et crédit d'impôt
+	(e) Pensions de retraite privée et professionnelle
+	(f) Revenus de l'investissement et de l'épargne
+	(g) Transferts privés et autres revenus
−	(h) Impôts sur le revenu (salariés et employés indépendants)
−	(i) Contributions d'assurance nationale (salariés et employés indépendants)
−	(j) Contributions au régime de retraite professionnel
−	(k) Taxes locales
=	**Revenu total net des ménages**

Tableau 2.1 – **Source : "*The income sources included in net household income*" de Jenkins (2010a, p. 18)**

Un ménage peut cependant englober plusieurs unités bénéficiaires ("*benefit unit*"), c'est-à-dire, plusieurs couples ou personnes adultes avec ou sans enfant à charge. Pour analyser les inégalités de croissance ajustée, nous nous intéressons à la situation familiale des différentes unités bénéficiaires identifiées au sein d'un même ménage. Les unités bénéficiaires – que nous pouvons qualifier de familles – sont réparties selon 8 sous-groupes distincts. Chacun de ces sous-groupes représentent une situation familiale déclarée par les unités bénéficiaires tout au long de l'enquête. Si cette situation est amenée à évoluer au cours du temps, les familles sont placées dans un sous-groupe à part. Les couples en âge d'exercer une activité professionnelle avec ou sans enfant à charge sont rassemblés dans un même et premier sous-groupe (G1). Un second sous-groupe (G2) est formé pour les personnes retraitées qui vivent en couple. Nous distinguons, ensuite, les hommes [resp. les femmes] célibataires en âge d'exercer et sans enfant à charge, rattachés au sous-groupe (G3) [resp. (G4)], des hommes [resp. femmes] retraité(e)s vivant seul(e)s que nous plaçons dans le sous-groupe (G5) [resp. (G6)]. Dans un septième sous-groupe (G7) nous réunissons les familles monoparentales qui ont, au moins, un enfant à charge (hommes et femmes confondus). Lorsque la situation familiale des unités bénéficiaires diffère entre la période initiale et la période finale, elles sont affectées au dernier sous-groupe (G8).

Comme l'indique Jenkins (2010a), il est rare que les individus membres de l'échantillon original (*c-à-d.*, de l'échantillon conçu en 1991) participent à la totalité des vagues d'enquête. Leur participation est discontinue et se solde parfois par un abandon. Seuls 4 653 individus ont répondu à l'ensemble des questionnaires annuels. Le traitement des valeurs manquantes est effectué en amont par les concepteurs de l'enquête. Un système de pondération est élaboré pour tenir compte de la non réponse au niveau des ménages. Certaines valeurs sont complétées en utilisant la méthode du plus proche voisin.[27] Jenkins (2010a) souligne que ces modifications sont effectuées dans le but de rendre les données les plus représentatives possibles de la population des ménages privés en Grande Bretagne. Cette opération est encouragée par les résultats mis en avant par Frick, Grabka et Groh-Samberg (2009) qui démontrent qu'une simple élimination des valeurs manquantes biaise l'analyse de la mobilité des revenus et tend à minimiser les évaluations. Les données que nous téléchargeons à partir du site officiel[28] ne peuvent cependant pas être exploitées directement et demandent à être retravaillées. Nous suivons les suggestions de Jäntti et Jenkins (2013). Nous commençons par nettoyer nos données de manière à éliminer les valeurs aberrantes et à éviter de biaiser notre analyse. Nous supprimons 1% des valeurs à chaque extrémité des distributions de revenus net annuels. La suppression d'une fraction des valeurs extrêmes au sein des distributions est une pratique courante connue sous le nom de "*trimming*" qui permet de garan-

27. Méthode de traitement des données qui consiste à attribuer à un individu la même valeur que celle enregistrée pour la personne qui possède des caractéristiques similaires.

28. https://www.iser.essex.ac.uk/bhps/documentation/volb/index.html.

tir une plus grande robustesse des données [voir notamment Jäntti et Jenkins (2013), p.92 ou Cowell et Schluter (1998)]. Nous répétons cette opération sur chacune des 18 plages de données que nous étudions.

La situation politico-économique en Grande Bretagne entre 1991 et 2008 est ponctuée par un certain nombre de changements et de revirements selon l'orientation du parti élu à la tête du pays. Pour évaluer les inégalités de croissance ajustée sur cette période, nous choisissons dans un premier temps de scinder notre période d'étude en 2. Nous confrontons les résultats que nous obtenons sur les sous-périodes 1991-1997 et 1998-2008 avant de dresser un bilan sur l'ensemble de la période. De 1991 jusqu'au début [29] de l'année 1997, la Grande Bretagne est sous la gouvernance du parti conservateur britannique ("*Conservative Party*"), dirigé par John Major. John Major succède directement à Margaret Thatcher encore surnommée la « Dame de fer » en référence à son inflexibilité et à la politique d'austérité qu'elle a menée dans le but de redresser la situation économique du pays. Si les conservateurs sont partisans du libéralisme politique, ils restent attachés aux valeurs fondamentales [30] pour la société. Les membres du parti conservateur émettent une certaine réserve face à l'entrée des femmes sur le marché du travail à partir des années 70. Ils développent notamment un programme visant à mettre en place une aide financière réservée aux femmes au foyer qui se consacrent à l'éducation de leurs enfants [voir Carter (2008)]. Certains *lobby* de droite vont même jusqu'à encourager les mères à rester à la maison plutôt qu'à chercher un emploi [voir Abbott et Wallace (2010)]. Les premières statistiques correspondant à cette période obtenues à partir de l'échantillon à notre disposition sont les suivantes :

29. A partir du 2 mai 1997 le pays change d'orientation politique. Comme il nous est impossible de couper les données de l'enquête relatives à cette année, nous avons choisi de l'associer à la première période.

30. Ces valeurs fondamentales font références au mariage ainsi qu'au schéma traditionnel de la famille dans lequel le mari subvient aux besoins financiers de sa famille pendant que sa femme s'occupe des enfants et des tâches ménagères.

Situations familiales	Monoparentales (G7)	Femmes retraitées (G6)	Couples retraités (G2)	Evolutives (G8)	Hommes célibataires (G5)	Couples (G1)	Femmes célibataires (G4)	Hommes retraités (G3)	Total
Effectifs	101	104	234	1099	16	2259	130	218	**4 161**
Part des groupes	2,4%	2,5%	6%	26,4%	0,4%	54%	3%	5,3%	100%
Moyenne des revenus nets/an en 1991 (en £)	7 489,77	9 857,19	12 459,92	13 049,20	13 594,06	14 154,35	14 410,46	14 620,54	**13 528,27**
Moyenne des revenus nets/ an en 1997 (en £)	7 781,71	10 208,36	12 896,92	14 310,82	12 917,60	15 440,39	15 575,09	16 595,66	**14 737,38**

Tableau 2.2 – **Description statistique de la situation familiale en Grande Bretagne entre 1991 et 1997.**

Les idées véhiculées par le parti conservateur n'empêchent pas les femmes de réussir leur insertion professionnelle. A partir des années 80, près de 37% des femmes britanniques occupent des emplois à temps partiel [voir Yeandle (2009)].

Pour étudier les inégalités de taux de croissance ajustée des revenus individuels, nous fixons la valeur du paramètre r égale à 1 (au même titre que la constante $c = 1$) et nous prenons la fonction identité pour ϕ. Nous appliquons successivement les formes fonctionnelles relatives aux propriétés (API) et (MPI) présentées précédemment telles que :

$$G_n^{\text{API}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{n^2} \sum_i \sum_j \left| \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) - \ln\left(\frac{y_j}{x_j}\right) \right| ,$$

et

$$G_n^{\text{MPI}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{n^2} \sum_i \sum_j \left| \frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j} \right| ;$$

tel que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $n \geqslant 2$.

Lorsque $r = 1$, nos mesures correspondent à des adaptations de la différence moyenne de Gini (GMD) dans un contexte de croissance ajustée des revenus. Il apparaît alors, clairement, que la transformation logarithmique induite par (API) tend à lisser les écarts de taux de croissance (ajustée) au sein des distributions. Les conclusions restent néanmoins sensiblement les mêmes.

Sur la première sous-période 1991-1997, le coefficient estimé est $G^{\text{API}}_{n_{\{91-97\}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,5037$ [resp. $G^{\text{MPI}}_{n_{\{91-97\}}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,6131$]. Nous identifions, donc, la présence d'inégalités de croissance ajustée des revenus au sein de notre échantillon représentant la population de Grande Bretagne entre 1991 et 1997. Les disparités les plus importantes sont notées au sein du sous-groupe (G8) représentatif des familles dont la situation évolue au cours du temps. Ces évolutions sont pour l'essentiel subies. Elles reflètent une société en pleine mutation qui doit faire face à des divorces ou autres types de séparations conjugales, des décès ou au contraire des unions. La prise en compte de la situation familiale est une phase importante de la mesure des inégalités de croissance ajustée. Elle influe considérablement sur le montant des revenus disponibles des ménages. Les conséquences d'une séparation ou d'une nouvelle relation de couple se répercutent directement sur les ressources financières qui se voient alors diminuées ou au contraire augmentées selon les cas. Cela explique la valeur du coefficient $G^{\text{API}}_{n_{(G8)}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,6292$ [resp. $G^{\text{MPI}}_{n_{(G8)}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,7940$] mesurée dans ce sous-groupe. Les couples (G1) ainsi que les hommes célibataires (G3) affichent également des inégalités de croissance substantielles [voir Tableau 2.3]. Les écarts de taux de croissance notés entre les couples s'expliquent en grande partie par le nombre d'enfants à charge qui est très variable selon les couples et de fait, influe sur la décision d'un des deux parents (généralement la mère) de travailler ou non. Il est important de souligner que les coûts de garde d'enfants en Grande Bretagne figurent parmi les plus élevés d'Europe [voir Abbott et Wallace (2010)]. Certaines mères vont donc faire le choix de se consacrer à l'éducation de leurs enfants tandis que d'autres vont préférer mener de front éducation et vie professionnelle. De la même façon, les inégalités de croissance ajustée présentes au sein du groupe des hommes célibataires (G3) peuvent résulter de différences constatées entre les carrières et niveaux de qualification de chacun. Ces différences se répercutent en effet directement sur les montants des rémunérations. Les disparités les moins élevées sont par ailleurs celles du sous-groupe des hommes retraités (G5) avec un coefficient de $G^{\text{API}}_{n_{(G5)}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,3667$ [resp. $G^{\text{MPI}}_{n_{(G5)}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,2946$].

Le système des retraites britannique est un système considéré comme mixte bien que largement dominé par des actions de capitalisation. Pour bénéficier d'une retraite confortable, les salariés (ainsi que leurs employeurs) doivent anticiper et placer une partie de leur rémunération dans des fonds de pension. Les

Groupes	G5	G2	G6	G7	G8	G4	G1	G3
$G^{\text{API}}_{n_{\{91-97\}}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$	0,3667	0,3709	0,4082	0,4268	0,6292	0,4316	0,4622	0,4982
$G^{\text{MPI}}_{n_{\{91-97\}}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$	0,2946	0,4239	0,4897	0,4726	0,7940	0,5160	0,5542	0,6204

Tableau 2.3 – **Récapitulatif des inégalités de croissance en Grande Bretagne selon les groupes entre 1991 et 1997.**

retraités peuvent également bénéficier de pensions contributives financées par répartition et dont le montant dépend soit de la durée de cotisation ("*Basic State Pension*"), soit du salaire d'activité des salariés ("*State Earnings-Related Pension*") [voir Dupont (2003b) p.6 pour des explications détaillées]. A partir de 1995 une nouvelle législation ("*Pension Act*") est mise en place pour assurer le bon fonctionnement du système des retraites. Une autorité de régulation ("*Occupational Pensions Regulatory Authority*" (OPRA)) est notamment créée pour éviter que la Grande Bretagne ne soit à nouveau frappée par une série de scandales comparables à ceux de l'affaire Maxwell [31] qui débute en 1991. La loi des finances de 1986 offre néanmoins la possibilité −*via* des plans de retraite individuels ("*Personal Pension Scheme*")− à toute personne ne bénéficiant pas d'une retraite professionnelle de se constituer une épargne [voir Dupont (2003b), p. 13]. Les aménagements prévus par le gouvernement britannique assurent une certaine harmonisation des revenus disponibles pour les personnes à la retraite ce qui explique que les inégalités soient les moins fortes pour ces sous-groupes (G5, G2 et G6).

Au sein de notre échantillon, les inégalités de croissance ajustée des revenus sont majoritairement de nature **intergroupe**. Alors que les inégalités de croissance (ajustée) intragroupes constituent près de 36% des disparités totales, les

31. Près de 450 millions de livres sont détournés des fonds de pension à cette époque [voir Dupont (2003b) p.16 pour une synthèse des scandales qui frappent la Grande Bretagne entre 1980 et 1991.

inégalités de croissance (ajustée) intergroupes représentent plus de 64%. La répartition des familles dans les différents sous-groupes étant assez inégale, nous nous focalisons essentiellement sur les coefficients non pondérés. Comme cela a été évoqué au chapitre précédent, le facteur taille joue un rôle non négligeable dans l'interprétation des résultats du fait de la structure des fonctions de pondération. Le sous-groupe des familles dont la situation familiale évolue au cours du temps (G8) est celui qui entretient le plus d'inégalités de croissance ajustée avec les autres sous-groupes. La valeur de l'ensemble des coefficients intergroupes impliquant le sous-groupe G8 excède celle de l'indicateur d'inégalité de croissance (ajustée) global [voir Tableaux 2.4 et 2.5]. De manière générale les coefficients d'inégalité de croissance (ajustée) entre les sous-groupes varient entre 0,3778 (pour G2 et G5) et 0,5712 (entre G8 et G3). La situation familiale influe donc de manière significative sur les inégalités de croissance ajustée.

$r = 1$		G5	G2	G6	G7	G8	G4	G1	G3
	G5	0,3667							
	G2	0,3777	0,3709						
	G6	0,3978	0,3908	0,4082					
G_B^{API}	G7	0,4174	0,4056	0,4233	0,4268				
	G8	0,5314	0,5170	0,5318	0,5370	0,6292			
	G4	0,4141	0,4062	0,4233	0,4353	0,5391	0,4316		
	G1	0,4336	0,4238	0,4407	0,4490	0,5517	0,4482	0,4622	
	G3	0,4630	0,4521	0,4679	0,4753	0,5712	0,4702	0,4832	0,4982

Tableau 2.4 – **Coefficients d'inégalités de croissance (ajustée) intergroupes non-pondérés sur la sous-période 1991-1997 (part.1)**

$r=1$		G5	G2	G6	G7	G4	G1	G8	G3
	G5	0,2946							
	G2	0,3676	0,4239						
	G6	0,4024	0,4582	0,4897					
G_B^{MPI}	G7	0,4073	0,4565	0,4881	0,4726				
	G4	0,4234	0,4758	0,5070	0,5008	0,5160			
	G1	0,4480	0,4980	0,5290	0,5186	0,5367	0,5542		
	G8	0,5902	0,6307	0,6600	0,6459	0,6656	0,6814	0,7940	
	G3	0,4978	0,5440	0,5737	0,5612	0,5750	0,5911	0,7145	0,6204

Tableau 2.5 – **Coefficients d'inégalités de croissance (ajustée) inter-groupes non-pondérés sur la sous-période 1991-1997 (part. 2)**

A présent, nous réalisons la même analyse sur la seconde sous-période 1998-2008. Le 2 mai 1997, la Grande Bretagne change d'orientation politique. Le pays est désormais sous l'influence du parti travailliste dirigé par Tony Blair. Il occupe le poste de premier ministre pendant une dizaine d'années avant d'être remplacé en 2007 par Gordon Brown jusqu'alors Chancelier de l'Echiquier. L'arrivée de Tony Blair au pouvoir marque un tournant pour la Grande Bretagne. Un nouveau regard est porté sur les familles et tout particulièrement sur la condition des femmes [voir Abbott et Wallace (2010)]. Les travaillistes appliquent une politique dite néolibérale qui se traduit par une flexibilisation du marché du travail. Cette flexibilisation offre davantage d'opportunités en termes d'emploi et tend à faciliter l'insertion professionnelle des femmes. Pour favoriser le retour à l'emploi et abaisser au maximum la pauvreté, un certain nombre d'aides sont créées. Des crédits d'impôts sont accordés aux familles dans le besoin ("*Family Tax Credits*", "*Working Tax Credit*" ou "*Child Tax Credits*"). Les familles peuvent également bénéficier de prestations diverses ("*Welfare to Work*"), d'allocations familiales ("*Child Benefit*") ou encore d'allocations de naissance ("*Sure Start Maternity Grant*"), comme l'indiquent Abbott et Wallace (2010).

Sur la sous-période 1998-2008, la répartition des familles selon nos critères de partitionnement se présente comme suit :

Groupes	G7	G6	G5	G8
Effectifs	44	192	52	1755
Part des groupes	1%	5%	1%	42%
Moyenne des revenus nets/an en 1998 (en £)	7 706,42	10 728,06	11 780,64	14 511,27
Moyenne des revenus nets/ an en 2008 (en £)	11 533,77	12 682,24	12 930,25	16 864,20

Groupes	G4	G3	G2	G1	Total
Effectifs	114	186	386	1427	4156
Part des groupes	3%	4%	9%	34%	100%
Moyenne des revenus nets/an en 1998 (en £)	14 801,76	14 826,28	15 007,81	15 363,66	14 591,14
Moyenne des revenus nets/ an en 2008 (en £)	18 076,64	18 876,52	14 613,94	18 829,23	17 154,38

Tableau 2.6 – **Description statistique de la situation familiale en Grande Bretagne entre 1998 et 2008.**

La taille de ce nouvel échantillon est un peu inférieure à celle de l'échantillon de la première sous-période. Nous notons un accroissement des effectifs des groupes de personnes retraitées, toutes situations familiales confondues. Ces effectifs croissants sont représentatifs du vieillissement de la population britannique. Comparativement aux observations faites sur la sous-période 1991-1997, le nombre de familles dont la situation évolue au cours du temps est diminué de moitié, tandis que le nombre de couples a quasiment triplé, reflétant ainsi une certaine stabilité familiale. Les inégalités de croissance ajustée des revenus mesurées sur cette seconde sous-période n'en sont pas moins importantes. Le coefficient de Gini global est même supérieur à celui obtenu sur la sous-période 1991-1997, avec une valeur $G^{\mathrm{API}}_{n_{\{98-08\}}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,5575$ [resp. $G^{\mathrm{MPI}}_{n_{\{98-08\}}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,7445$]. Entre 1998 et 2008 la Grande Bretagne connait une crise financière qui a des retombées économiques sur le pays [voir Dupont (2003b), p. 18]. Cette hausse des inégalités de croissance ajustée influe sur les contributions des composantes intra- et intergroupes. La contribution des différents sous-groupes aux inégalités de croissance ajustée totales est à 68% de nature **intergroupe**. Les inégalités de croissance intragroupes représentent quant à elles 32% des disparités totales. En dépit des dispositions prises par le gouvernement britannique pour apporter un soutien aux familles monoparentales (G7), elles connaissent la plus importante hausse d'inégalités de croissance ajustée des revenus. L'indicateur de dispersion calculé pour ce sous-groupe est presque aussi élevé que le coefficient d'inégalité de croissance global [voir Tableau 2.7]. Les inégalités de croissance ajustée relevées pour le sous-groupe des femmes retraitées (G6) semblent de la même ampleur que celles notées pour le sous-groupe des hommes retraités (G5).

Ces disparités de taux de croissance ajustée qui touchent les retraités vivant seuls sont la conséquence des restrictions imposées par le parti conservateur lorsqu'il détenait la majorité. Selon Dupont (2003b) la décision du parti conservateur de réduire les retraites publiques génère d'importantes disparités qui affectent directement cette tranche de la population. La situation financière des retraités se dégrade d'autant plus que le parti travailliste poursuit les actions visant à réduire les dépenses publiques de retraites. Ces réformes surviennent à un moment où la confiance dans l'épargne privée est ébranlée par les récents scandales financiers qui touchent le pays. Parallèlement à cela, le parti travailliste incite la population à prolonger sa durée d'activité professionnelle en menant des campagnes contre la discrimination selon l'âge des individus ("*Age positive Campaign*") et en augmentant l'âge légal de départ à la retraite.

Pour s'aligner avec les autres pays européens, le gouvernement de Tony Blair met en place [32] un revenu minimum garanti indexé sur les salaires ("*Minimum Income Garantee*") à partir de 1999, ainsi que des congés payés et des congés de maternité. Les couples (avec ou sans enfant(s) à charge), toutes classes d'âges confondues (c'est-à-dire, G1 et G2) apparaissent ici comme les familles les moins touchées par les inégalités de croissance ajustée, bien qu'elles restent effectives. Les aménagements de temps de travail prévus par le parti travailliste permettent aux parents d'adapter leurs horaires de travail en fonction des besoins de leur famille. Certaines familles choisissent même de travailler par roulement ("*Shift Parenting*") de manière à ce que l'un des parents puisse toujours être disponible pour s'occuper des enfants.

Groupes	G2	G5	G8	G6	G1	G4	G3	G7
$G^{\text{API}}_{n_{\{98-08\}}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$	0,4237	0,5455	0,6109	0,5458	0,5137	0,5349	0,5497	0,5390
$G^{\text{MPI}}_{n_{\{98-08\}}}(\mathbf{x},\mathbf{y})$	0,4433	0,6933	0,8322	0,7336	0,6837	0,8011	0,7673	0,8755

Tableau 2.7 – **Récapitulatif des inégalités de croissance en Grande Bretagne selon les groupes entre 1998 et 2008.**

Finalement, le sous-groupe des familles dont la situation évolue au cours du temps (G8) reste le sous-groupe dans lequel les inégalités de croissance sont les plus fortes [voir Tableau 2.7]. Nous constatons également des écarts de taux

32. *Cf.* Dupont (2003b) et Abbott et Wallace (2010) pour plus de précisions.

croissance élevés entre ce sous-groupe et les autres sous-groupes [voir Tableaux 2.8 et 2.9 en Annexes]. Ces écarts restent cependant inférieurs à ceux estimés d'une part, entre les familles monoparentales (G7) et les autres sous-groupes, et d'autre part, entre les personnes célibataires (G3 ou G4) et les sous-autres groupes.

$r = 1$		G2	G5	G8	G6	G1	G4	G3	G7
	G2	0,4237							
	G5	0,5138	0,5455						
	G8	0,5424	0,5857	0,6109					
G_B^{API}	G6	0,5112	0,5513	0,5800	0,5458				
	G1	0,5011	0,5341	0,5653	0,5315	0,5137			
	G4	0,5078	0,5450	0,5752	0,5421	0,5251	0,5349		
	G3	0,5231	0,5525	0,5835	0,5498	0,5323	0,5439	0,5497	
	G7	0,5799	0,5781	0,6032	0,5671	0,5480	0,5626	0,5634	0,5390

Tableau 2.8 – **Coefficients d'inégalités de croissance (ajustée) inter-groupes non-pondérés sur la sous-période 1998-2008 (part.1)**

$r = 1$		G2	G5	G6	G1	G8	G3	G4	G7
	G2	0,4433							
	G5	0,6020	0,6933						
	G6	0,6262	0,7208	0,7336					
G_B^{MPI}	G1	0,6055	0,6934	0,7111	0,6837				
	G8	0,6749	0,7715	0,7847	0,7611	0,8322			
	G3	0,6534	0,7367	0,7533	0,7263	0,8033	0,7673		
	G4	0,6603	0,7525	0,7700	0,7439	0,8192	0,7864	0,8011	
	G7	0,8023	0,8405	0,8406	0,8155	0,8921	0,8525	0,8783	0,8755

Tableau 2.9 – **Coefficients d'inégalités de croissance (ajustée) intergroupes non-pondérés sur la sous-période 1998-2008 (part. 2)**

Lorsque nous considérons l'ensemble de la période 1991-2008, les tendances s'inversent. La contribution des inégalités de croissance ajustée intragroupes atteint 61% des disparités de croissance (ajustée) totales de l'échantillon. Les inégalités de croissance ajustée intergroupes ne représentent plus que 39% des inégalités de croissance de l'ensemble de l'échantillon [voir Tableaux 2.29, 2.30 et 2.31 en Annexes]. L'examen des coefficients mesurés dans les différents sous-groupes n'apporte aucun élément nouveau pour notre étude. Nous retrouvons l'idée que les retraités vivant seuls (G5), les familles monoparentales (G7), les familles dont le situation évolue dans le temps (G8), sans oublier les hommes célibataires sans enfant à charge (G3), bénéficient de taux de croissance ajustée très disparates ce qui génère d'importantes inégalités de croissance (ajustée). Ces inégalités de croissance ajustée se manifestent, non seulement, au sein de ces sous-groupes mais également avec les autres sous-groupes pour les raisons mentionnées antérieurement.

Dans l'ensemble les résultats convergent vers les mêmes conclusions : il existe des inégalités de taux de croissance ajustée des revenus significatives en Grande

Bretagne. Ces disparités observées entre 1991 et 2008 sont conditionnées par la situation familiale de chacun des membres de l'échantillon ainsi que par le contexte politico-économique dans lequel elles sont étudiées. En conclusion, une augmentation des inégalités de croissance ajustée des revenus entre les deux sous-périodes 1991-1997 et 1998-2008 ressort clairement de notre étude. Pour approfondir notre analyse et déterminer quelle est la nature exacte des mouvements de revenus que connaissent les différentes familles britanniques sur l'ensemble de la période 1991-2008, il est néanmoins préférable d'adopter une autre approche qui permette d'exprimer distinctement les mouvements de revenus personnels comme interpersonnels de nature intra- et intergroupes. Les principes sur lesquels est basée une telle approche font l'objet de la section suivante.

2.3 Les mouvements interpersonnels de revenus

L'objet de cette Section est d'approfondir notre étude des mouvements de revenus. Pour ce faire, nous proposons une nouvelle approche basée sur la prise en considération des *mouvements interpersonnels de revenus*. Cette nouvelle approche repose sur une adaptation de la propriété d'agrégation (décomposition) faible, aux mesures de mouvements de revenus. Comme nous le rappelons dans un premier temps, la plupart des méthodes de décompositions définies dans la littérature sur la mobilité se focalisent principalement sur l'interprétation économique des composantes. L'aspect de la décomposition en sous-groupes tend à être négligé ou n'est traité que partiellement par quelques auteurs comme nous l'évoquons au cours de notre développement.

Nous postulons que les changements observés sur les revenus individuels au cours du temps ne peuvent pas uniquement s'expliquer en fonction de la situation personnelle de chaque individu d'une société pris indépendamment. Ils sont le résultat de comparaisons interpersonnelles des revenus sur les différentes périodes de temps. Partant de ce principe, nous énonçons deux nouveaux axiomes. Ces axiomes, inspirés des travaux d'Ebert (2010), visent à capter ces comparaisons interpersonnelles de revenus et à rendre possible la décomposition des mesures de mouvements (directionnelles) en composantes intra- et intergroupes. A l'aide de ces propriétés, nous caractérisons axiomatiquement la classe générale des mesures de mouvement interpersonnel, dont fait notamment partie la mesure directionnelle de Fields et Ok (1999b). Notre méthode de décomposition en sous-groupes, ainsi qu'une forme additive plus restreinte sont ensuite appliquées sur un échantillon d'individus issu de l'enquête longitudinale BHPS, à titre de comparaison. Les mouvements de revenus (nets) des familles britanniques sont analysés en fonction de leur statut économique sur une période de 18 ans.

2.3.1 Les différentes approches de la décomposition

Tout comme la plupart des mesures d'inégalités, les mesures de mobilité peuvent satisfaire une propriété de décomposition. La première propriété de décomposition introduite dans les années 80 par Markandya s'inspire des travaux sur la mobilité menés en sociologie. Pour Markandya (1982, 1984) la mobilité totale doit être décomposée en une composante de *mobilité structurelle* et une composante de *mobilité d'échange*. Selon cet auteur, la définition de telles composantes doit permettre de déterminer l'impact des changements de revenus sur le bien-être des individus. Ce procédé de décomposition est ensuite repris et complété par Chakravarty, Dutta et Weymark (1985), Maasoumi (1998), Ruiz-Castillo (2004), Van Kerm (2004), ou encore Schluter et Van de gaer (2011). La définition des composantes se précise davantage et il est établi que :

- la *mobilité structurelle* comptabilise les changements qui affectent la distribution marginale des revenus au cours du temps ;
- la *mobilité d'échange* tient compte des modifications de classements qui affectent les individus au cours du temps.

Cette méthode de décomposition bien que largement utilisée dans la littérature, ne peut s'appliquer à l'ensemble des mesures de mobilité. Van Kerm (2004) rappelle en effet que des mesures telles que la mesure de Schiller (1977), qui sont insensibles à la notion de mobilité structurelle sont de fait, incompatibles avec cette décomposition.

Parallèlement à ces travaux, un autre procédé de décomposition est suggéré par Fields et Ok (1996, 1999). Toujours sur la base de deux composantes, ces auteurs proposent de scinder la mobilité totale en une *composante de croissance* ($\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) et une *composante de transfert* ($\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$). Pour analyser les changements de revenus, Fields et Ok classent les individus selon deux catégories : les gagnants (qui parviennent à tirer profit du temps) et les perdants (sur qui le temps a des effets néfastes). La composante de croissance, comme son nom l'indique, se focalise uniquement sur les individus en situation de croissance, autrement dit les gagnants. Dans une perspective utilitariste cette composante peut s'interpréter comme le changement de bien-être par tête [voir Fields et Ok (1999)]. La composante de transfert se calcule à partir des revenus individuels dont la valeur à la période initiale est supérieure à celle de la période finale (assimilée aux perdants). Le terme de transfert employé par Fields et Ok (1996,1999) réfère au fait que chaque unité de revenu perdue par un individu est implicitement réallouée à un autre individu ; le revenu total étant maintenu constant. Partant de ce principe, Fields et Ok considèrent que cette composante représente deux fois l'utilité sociale perdue par les perdants :

$$
\begin{aligned}
m_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{n} \sum_{y_i \geqslant x_i} \{\ln y_i - \ln x_i\} + \frac{2}{n} \sum_{x_i > y_i} \{\ln x_i - \ln y_i\} \\
&= \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ + \ \mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \ ; \qquad \text{(F\&O)}
\end{aligned}
$$

où m_n est la mesure de changements par tête agrégés en logarithme des revenus ("*per capita aggregate change in log-incomes*") caractérisée par Fields et Ok (1999b), telle que $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$.

L'expression formelle de cette décomposition présentée ci-dessus s'applique dans le cadre d'une économie de croissance. Si au contraire, l'économie tend à se contracter, les formulations des composantes sont inversées. Mis à part les mesures de mouvements absolues (d_n) caractérisées par ces mêmes auteurs en 1996, les mesures m_n sont les seules à satisfaire ce schéma de décomposition.

Van Kerm (2004) revisite les deux précédents modes de décomposition et décide de faire appel à des distributions dites « contrefactuelles ». Il définit non pas 2 mais 3 composantes (mesurant la croissance, la dispersion et l'échange) dont l'une d'elles (la composante d'échange) s'apparente au concept de mobilité positionnelle [voir Van Kerm (2004, p. 235)]. Soit $M : \mathbb{R}^{2n}_{+} \longrightarrow \mathbb{R}$ une mesure de mobilité, alors

$$
\begin{aligned}
M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \ \{M(\mathbf{x}, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\} + \{M(\mathbf{x}, D \circ G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) - M(\mathbf{x}, G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\} \\
& + \ \{M(\mathbf{x}, E \circ D \circ G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) - M(\mathbf{x}, D \circ G(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\} \\
& = M^G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + M^D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + M^E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ ; \qquad \text{(Van Kerm)}
\end{aligned}
$$

où $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $D(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont des fonctions de transformations générant des vecteurs de distributions contrefactuelles en relation respectivement avec la composante de croissance, de dispersion et d'échange. [33]

Ces diverses décompositions ne permettent cependant pas de produire une analyse précise des mouvements de revenus qui affectent les individus. Le caractère individuel de la mobilité est délaissé au profit d'interprétations économiques plus générales. La méthode de décomposition en sous-groupes est envisagée pour les mesures de mobilité à partir de l'année 1985 avec les travaux précurseurs de Cowell. L'idée est ensuite reprise quelques années plus tard par Fields et Ok (1996, 1999). Les premières tentatives d'adaptation sont largement inspirées des travaux sur les inégalités de Bourguignon (1979), Cowell (1980a, 1980b) et Shorrocks (1980,1984). La première propriété (DF) équivaut à la version faible de la décomposition en sous-groupes énoncée par Shorrocks (1984) dans un contexte d'inégalités. Sa retranscription au cadre des mesures de mobilité se traduit par une forme plus forte que dans le cas des mesures d'inégalités, comme le font remarquer Fields et Ok (1996).

Axiome 2.3.1 – Décomposition forte – (DF). *Pour* $n \geqslant 2$ *et tout* $\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i \in \mathbb{R}_+^{n_i}$, $i \in \{1,2\}$ *avec* $n_1 + n_2 = n$ *:*

$$d_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F_n(d_{n_1}(\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^1), d_{n_2}(\mathbf{x}^2,\mathbf{y}^2)) \; ; \tag{DF}$$

pour toute fonction symétrique et non nulle, $F_n : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *avec* $d_n : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$. [34]

33. Cette relation de dépendance entre les contributions estimées des facteurs et les fonctions de transformations qui permettent de générer ces mêmes facteurs constitue un point faible de cette décomposition, comme le fait remarquer Van Kerm lui-même p.226.

34. Rappelons que d_n dénote ici la mesure absolue de mobilité de revenus définie par Fields et Ok (1996) :

$$d_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^\alpha\right)^{1/\alpha}, \; \alpha > 0.$$

Fields et Ok (1996) reprochent à cette propriété de décomposition d'imposer une structure trop contraignante pour les mesures de mobilité. Selon eux, la fonction de désagrégation définie dans (DF) ne permet pas de tenir compte de la taille des groupes constitués à partir de la population mère. La mesure de mobilité globale ainsi décomposée dépend uniquement de la mobilité observée au sein des différents groupes [voir arguments de Fields et Ok (1996), p. 354]. Ils suggèrent, alors, une propriété de décomposition plus faible (WD) qui s'inscrit dans la continuité des travaux de Cowell (1985b), tout en s'inspirant de ceux de Foster et Shorrocks (1991) pourtant destinés à un domaine différent, celui de la pauvreté.

Axiome 2.3.2 – Décomposition faible – (WD). *Pour $n \geqslant 2$ et tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$:*

$$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = H_n(d_1(x_1, y_1), \ldots, d_1(x_n, y_n)) \; ; \tag{WD}$$

pour toute fonction symétrique, non nulle et continue, $H_n : \mathbb{R}^n_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Pour Fields et Ok (1996), cette seconde propriété offre une représentation plus fidèle de la mobilité globale au sein d'une population. L'application de (WD) implique que la mobilité totale résulte uniquement de l'agrégation des changements de revenus individuels. Cette nouvelle formulation ne permet cependant pas de faire ressortir clairement d'éventuels critères de partitionnement. Le fait de considérer les individus comme des entités singulières ne donne pas la possibilité à l'analyste de cerner les causes, relatives aux critères de partitionnement, de la mobilité observée. La propriété de décomposition doit être repensée de manière à intégrer totalement les différents critères de partitionnement dans le procédé de désagrégation. Il s'agit de pouvoir évaluer la mobilité à l'intérieur et entre les différents sous-groupes formés à partir de la population mère selon des critères bien précis.

Une solution alternative que certains chercheurs choisissent d'adopter consiste à construire une mesure de mobilité à partir d'un indice d'inégalité additivement décomposable au sens de Shorrocks (1980,1984). L'approche formelle est introduite par Bunchinsky et Hunt (1999). Les auteurs se basent tout d'abord sur un indicateur d'inégalités de la famille de l'entropie généralisée – reconnu comme satisfaisant la propriété de décomposition additive – puis l'injectent dans l'indice de mobilité de Shorrocks (1978a, 1978b). La décomposition en sous-groupes de cet indicateur est assurée par construction :

$$\begin{aligned} M(\mathbf{x}) = \; & \left[1 - \frac{I^W\left(1/T \sum_{t=1}^{T} x_t\right)}{\sum_t \eta_t I^W(x_t)}\right] \frac{\sum_t \eta_t I^W(x_t)}{\sum_t \eta_t I(x_t)} \\ + \; & \left[1 - \frac{I^B\left(1/T \sum_{t=1}^{T} x_t\right)}{\sum_t \eta_t I^B(x_t)}\right] \frac{\sum_t \eta_t I^B(x_t)}{\sum_t \eta_t I(x_t)} \\ = \; & M^W \cdot S_T^W \; + \; M^B \cdot S_T^B \; ; \end{aligned} \qquad \text{(B \& H)}$$

tel que T désigne le nombre d'années, η_t est un facteur de pondération qui dépend de x_t (le vecteur individuel des salaires aux temps t). La mobilité des salaires évaluée par la mesure M consiste à comparer l'inégalité mesurée à partir de la moyenne des salaires annuels et l'inégalité constatée entre les salaires annuels. Elle se décompose en une mesure de mobilité intragroupe M^W et une mesure de mobilité intergroupe M^B pondérées par la part d'inégalité intra- (S_T^W) ou intergroupe (S_T^B) dans l'inégalité totale en coupe transversale.

A l'instar de Morduch et Sicular (1995), la composante d'inégalité intergroupe se calcule non plus à partir des moyennes des groupes mais sur les valeurs prévues de la distribution $\mathbf{x}$. Les moindres carrés pondérés peuvent par exemple être utilisés pour estimer les prédictions. Cette propriété est ensuite reprise et appliquée à d'autres mesures de mobilité par Ramos (1999) et Chen (2009). Ramos (1999) fournit une étude de la rigidité des salaires en Grande Bretagne entre 1991 et 1995. A l'aide des données de l'enquête BHPS, il démontre l'existence d'une relation entre la mobilité intra-distributionnelle et l'inégalité permanente. Quelques années plus tard, Chen (2009) réalise une étude comparative des facteurs de transitions observés à partir des revenus nets des familles du Canada, des États-Unis, de Grande Bretagne et d'Allemagne. Dans son approche, l'auteur recourt à des indicateurs de mobilité variés qu'il soumet à différents procédés de décomposition, ce qui le conduit parfois à des conclusions totalement opposées d'un indicateur à l'autre.

Au-delà des facilités d'interprétation et de mises en œuvre qu'apporte la décomposition de Bunchinsky et Hunt (1999), les résultats produits par cette approche sont conditionnés par l'indicateur d'inégalité retenu pour la construction de la mesure de mobilité. Destinée principalement aux études de mobilité en termes de réduction des inégalités à long terme, cette décomposition ne permet pas de capter des mouvements de revenus individuels, à l'intérieur et entre les différents sous-groupes de population. Fields et Ok (1999b) adaptent finalement la propriété de décomposition des mesures de pauvreté de Foster, Greer et Thorbecke (1984) au concept de mouvements de revenus. Le schéma de décomposition est similaire à celui de la décomposition additive en sous-groupes traditionnelle. La seule particularité de cette propriété (SD) tient à l'absence de la définition d'une composante de nature intergroupe. La mesure de mouvement globale se résume à une somme pondérée des mouvements de revenus individuels intragroupes.

Axiome 2.3.3 – Décomposition en sous-groupes – (SD). *Soit* $m_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *une mesure de mouvement telle que* $m_n : \mathbb{R}^{2n}_{++} \longmapsto \mathbb{R}_+$. *Étant donné une population subdivisée en* G *sous-groupes de tailles respectives* n_g *avec* $g \in \{1, \ldots, G\}$, *la mesure* $m_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *est décomposable en sous-groupes si elle sa-*

tisfait la propriété suivante :

$$m_n((x^1, \ldots, x^G), (y^1, \ldots, y^G)) = \sum_{g=1}^{G} \left(\frac{n_g}{n}\right) m_{n_g}(\mathbf{x}^g, \mathbf{y}^g) \ ; \qquad \text{(SD)}$$

avec $\mathbf{x}^g, \mathbf{y}^g \in \mathbb{R}_{++}^{n_g}$ *les distributions de revenus rattachées à chaque sous-groupe* g *en période initiale et en période finale.*

Le concept de croissance de revenus qui sous-tend les mesures de mouvements définies par Fields et Ok (1999) exclut la possibilité que la croissance du revenu ressentie par un individu puisse être influencée par les revenus des autres individus de la distribution. Les comparaisons de mouvements de revenus entre individus de groupes différents sont négligées par la structure de la décomposition (SD). L'entière contribution des différents groupes est uniquement de nature intragroupe. L'analyse des mouvements de revenus proposée par Fields et Ok (1999b) bien qu'intuitive n'est que partielle. Nous montrons en effet dans la section suivante que la mesure de mouvement directionnelle $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de Fields et Ok peut être scindée en une composante de mouvements intragroupes et une composante de mouvements intergroupes. Le concept de croissance, tel que nous le concevons, ne fait plus appel à la simple comparaison du revenu d'un individu au temps t avec le revenu de ce même individu au temps $t + 1$. Cela nécessite désormais de prendre en compte les revenus des autres individus au temps t. Ainsi, en plus de pouvoir déterminer si son revenu individuel a augmenté ou diminué d'une période à une autre, l'individu peut également se positionner par rapport aux autres individus de sa distribution en déterminant l'impact que ce changement de revenu a sur les autres.

2.3.2 Les mesures de mouvements interpersonnels

Dans ce paragraphe, nous suggérons une nouvelle approche du concept de mouvements de revenus en l'associant à celui d'envie. Après une modification de sa situation économique personnelle, nous postulons qu'un individu ne souhaite pas uniquement connaître l'impact que ce changement a sur son propre revenu, il souhaite également connaître les répercussions qu'un tel changement peut avoir pour lui au regard de la situation économique du reste de la société. Chaque individu souhaite savoir si à la suite d'un changement économique il/elle a pu améliorer, maintenir ou au contraire détériorer sa situation comparativement aux autres individus de la distribution. De telles considérations permettent également aux individus d'appréhender leurs gains/pertes d'un point de vue plus général et parfois même de relativiser l'appréciation qu'ils en font. Imaginons par exemple que le revenu de l'individu le plus riche d'une distribution diminue sur un intervalle de temps fixé. Le montant de revenu en période finale est donc plus faible que celui en sa possession en période initiale. Cependant, si l'individu constate qu'en dépit de la baisse de son revenu personnel, il/elle reste plus riche que l'ensemble des individus qui étaient plus pauvres que lui/elle en période initiale, alors l'effet négatif induit par la diminution de son revenu sur son niveau de satisfaction (utilité) personnel est atténué, compte tenu de la situation économique du reste de la société. De manière générale, nous considérons donc que les mouvements de revenus ne sont pas juste personnels, ils sont *interpersonnels*.

Nous distinguons les mesures de mouvements symétriques M, des mesures non-symétriques dites *directionnelles* D. Nos recherches se focalisent essentiellement sur les mesures de mouvements directionnelles afin de capturer la dimension bien-êtriste qui sous-tend la notion d'envie incluse dans les comparaisons de revenus interpersonnelles. En tenant compte de la direction empruntée par les mouvements de revenus, nous pouvons déterminer l'impact réel que les changements de revenus ont sur les situations individuelles. Lorsque plusieurs individus sont concernés par des changements de revenus, de telles mesures nous permettent de mettre en avant l'individu dont la situation s'est améliorée [resp. détériorée] au cours du temps. Nous distinguons les variations positives [assimilées à des phénomènes de croissance de revenus], des variations négatives [illustrant une décroissance]. Après un bref rappel des notations employées au cours de cette section, nous présentons les différentes propriétés nécessaires à notre travail de caractérisation. Nous introduisons notamment nos propriétés d'agrégation faible et de décomposition qui s'inspirent des travaux d'Ebert (2010). Nous définissons, alors, la classe générale des mesures de mouvements interpersonnels, puis nous démontrons que cette famille inclut certains indicateurs bien connus de la littérature, tels que la mesure des changements par tête en logarithme des revenus agrégés de Fields et Ok (1999b). Pour démontrer ce résultat, nous modifions la structure de cet indicateur afin qu'il tienne explicitement compte des comparaisons interpersonnelles de revenus au cours du temps.

Nous étudions les distributions de revenus sur 2 périodes de temps que nous désignons comme la période initiale et la période finale. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ la distribution de revenus en période initiale, (avec $\mathbb{R}^n_{++}$ l'espace Euclidien positif de dimension n et $\mathbb{R}^n_{+}$ sa partie non-négative). La distribution de revenus en période finale est notée $\mathbf{y}$, telle que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$. La transformation subie par les revenus entre la période initiale et la période finale est notée $\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{y}$ par convention. La taille de chaque distribution est respectivement $n(\mathbf{x})$ et $n(\mathbf{y})$. Dans un contexte intragénérationnel, la taille des deux distributions est supposée constante au cours du temps, de telle sorte que : $n(\mathbf{x}) = n(\mathbf{y}) \equiv n$. Nous supposons, de plus, que la population totale peut se subdiviser en G sous-groupes exhaustifs et exclusifs, sur chaque période de temps, avec $g \in \{1, \ldots, G\}$. Chaque distribution de revenus se subdivise donc de la manière suivante : $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^G)$ avec $\mathbf{x}^g = (x_1^g, \ldots, x_{n_g}^g)$ pour tout $g \in \{1, \ldots, G\}$. La taille de chaque sous-groupe est $n(\mathbf{x}^g)$. [35]

Définition 2.3.1 *Une mesure de mouvements est une fonction* ***continue*** $M_n : \mathbb{R}_{++}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$*, telle que sous l'hypothèse de symétrie* (SM) *:*

$$M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \textit{pour tout } n \geqslant 1.$$

Nous définissons $\mathcal{M} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$*, l'ensemble des classes de toutes les mesures de mouvements de revenus tel que* $\{M_n\} \in \mathcal{M}$*.* [36] $M_1(x_i, y_i)$ *correspond à la mesure du mouvement des revenus personnels (propres à l'individu* i*). Seul l'individu* i *est concerné par ce mouvement de revenus. Lorsque le mouvement de revenus a lieu entre deux individus différents* i *et* j*, nous notons la mesure du mouvement* $M_1(x_i, y_j)$*. Cette mesure évalue le* ***mouvement de revenus interpersonnel****.*

Un mouvement de revenu implique un changement dans la valeur du revenu au cours du temps. Nous partons du principe que pour évaluer l'intensité de son changement de revenu, un individu i compare son revenu en période finale à la fois avec le revenu en sa possession en période initiale et avec les revenus détenus (en période initiale) par l'ensemble des autres individus (j) de la distribution. En réalisant ces comparaisons interpersonnelles, chaque individu est en mesure de déterminer l'impact réel que son changement de revenu a, au niveau global. Pour renforcer la portée de ces comparaisons interpersonnelles, nous tenons compte de la direction des mouvements.

35. La taille de chaque sous-groupe peut être amenée à évoluer au cours du temps (modification du sous-groupe d'appartenance des individus), auquel cas $n(\mathbf{x}^g) \neq n(\mathbf{y}^g)$.

36. Ces notations correspondent à celles employées par Fields et Ok (1999b) qui figurent parmi les premiers à avoir étudié les mouvements de revenus. L'étude des variations agrégées de revenus est également développée par Cowell (1985b), Fields et Ok (1996,1999a) ou encore Mitra et Ok (1998).

Définition 2.3.2 *Une mesure de mouvements directionnelle est une fonction continue* $D_n : \mathbb{R}^{2n}_{++} \longrightarrow \mathbb{R}$*, telle que pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et tout* $\gamma > 1$ *:*

$$D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -D_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \text{et} \quad D_n(\mathbf{x}, \gamma\mathbf{x}) > D_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \ . \tag{DIR}$$

L'ensemble des classes de toutes les mesures de mouvements de revenus directionnelles se note alors $\mathcal{D} \equiv \prod_{n=1}^{+\infty} \mathcal{D}_n$*, tel que* $\{D_n\} \in \mathcal{D}$*.*

Les deux conditions nécessaires à la définition d'une mesure de mouvements directionnelle, exprimées au travers de l'équation (DIR), constituent l'essence même des mesures directionnelles au sens de Fields et Ok (1999b, p. 460). L'ordre dans lequel les distributions de revenus des deux périodes sont considérées pour le calcul de la mesure de mouvement est essentiel. Il est également important qu'une mesure directionnelle valorise les augmentations proportionnelles de revenus d'une période à une autre, généralement perçues comme de « bons » mouvements (c'est-à-dire, en faveur de la croissance économique). Dans notre cas, si une mesure de mouvements individuels agrégés est positive, cela signifie que l'augmentation de revenu n'est plus seulement observée au niveau personnel mais qu'elle se généralise à la presque totalité des individus de la société. Autrement dit, le revenu de chacun des individus pour lesquels l'agrégation des mesures personnelles et interpersonnelles est positive, est supérieur en période finale à la majorité des dotations détenues par les autres individus en période initiale (y compris la sienne).

A présent, nous pouvons mentionner les propriétés de bases que nous utilisons pour définir nos mesures de mouvements interpersonnels (directionnelles comme symétriques). La première de ces propriétés consiste à dire qu'en l'absence totale de mouvement, la mesure M (ou D) doit être nulle.

Axiome 2.3.4 – Normalisation –(NM). *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et* $\zeta \in$

$\mathbb{R}_{++}$ *:*

$$M_n(\zeta \mathbf{1}_n, \zeta \mathbf{1}_n) = 0 \; ; \tag{NM}$$

où $\mathbf{1}_n := (1, \ldots, 1)$ *est le vecteur de* 1 *de dimension* n*.*

Si la valeur 0 indique une situation d'immobilité (parfaite), aucune valeur n'est en revanche attribuée pour représenter la limite supérieure de la mesure de mouvements. En d'autres termes, il n'existe pas de changement maximal [voir Fields et Ok (1999b, p. 455-457)]. La propriété suivante établit qu'une mesure de mouvements reste inchangée lorsque la population est répliquée un nombre k de fois, sur chaque période de temps. Cette condition, tout comme la précédente, est bien connue de la littérature sur les inégalités. Il s'agit de la propriété d'invariance par réplication, attribuée à Dalton (1920). Elle est utile pour comparer les mesures de mouvements se rapportant à des populations de tailles différentes.

Axiome 2.3.5 – Invariance par réplication –(PP). *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et pour tout entier* $k \geqslant 2$ *:*

$$M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_{kn}\left(\mathbf{x}^{[k]}, \mathbf{y}^{[k]}\right) \; ; \tag{PP}$$

où $\mathbf{x}^{[k]} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k \;\; fois}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{k \;\; fois})$ *et* $\mathbf{y}^{[k]} = (\underbrace{y_1, \ldots, y_1}_{k \;\; fois}, \ldots, \underbrace{y_n, \ldots, y_n}_{k \;\; fois})$ *sont les vecteurs de revenus concaténés sur les différentes périodes, un nombre* k *de fois.*

Nous postulons ensuite que les mouvements de revenus ne dépendent pas de l'identité des individus.

Axiome 2.3.6 – Symétrie entre les individus –(SMi). *Soit* π *une matrice de permutations de dimension* $(n \times n)$*. Une mesure de mouvements*

$M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *satisfait la symétrie entre les individus si :*

$$M_n(\pi\mathbf{x}, \pi\mathbf{y}) = M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{SMi}$$

Cette propriété découle directement des travaux de Tsui (1999) sur les inégalités multidimensionnelles. Concernant les règles d'invariance,[37] nous considérons que le mouvement de revenus est soit insensible à une augmentation équiproportionnelle des revenus individuels à chaque période d'étude, soit insensible à une réduction [resp. augmentation] d'un même montant de revenu pour chaque individu sur les différentes périodes. Dans le premier cas, la mesure de mouvements est dite invariante quelle que soit l'échelle.

Axiome 2.3.7 – Invariance d'échelle –(SI). *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et pour tout* $\lambda > 0$:

$$M_n(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) = M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ . \tag{SI}$$

Dans le second cas, la mesure de mouvements de revenus est invariante par translation.

Axiome 2.3.8 – Invariance par translation –(INV). *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et* $n \geqslant 1$ *avec* $\varepsilon > 0$ *:*

$$M_n(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{1}_n, \mathbf{y} - \varepsilon\mathbf{1}_n) = M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ . \tag{INV}$$

Afin de tenir compte des changements d'échelle qui peuvent affecter les distributions de revenus au cours du temps, une propriété d'homogénéité linéaire peut être introduite.

37. Au-delà des implications normatives induites par chacune des propriétés d'invariance, elles offrent des facilités calculatoires d'un point de vue mathématique et permettent notamment de préciser la structure de l'indicateur recherché.

Axiome 2.3.9 – Homogénéité linéaire –(HL). *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ *et* $n \geqslant 1$ *avec* $\gamma > 0$ *:*

$$M_n(\gamma \mathbf{x}, \gamma \mathbf{y}) = \gamma M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ . \tag{HL}$$

Cet ensemble de propriétés est suffisant pour caractériser des mesures de mouvements de revenus cohérentes. Les bases du concept de mouvement interpersonnel repose cependant sur des propriétés plus spécifiques qui font appel à des notions d'agrégation ou de manière équivalente de décomposition en sous-groupes, habituellement employées en économie des inégalités ou de la pauvreté. L'adaptation de ces conditions aux mouvements de revenus nous permet d'identifier les sous-groupes dans lesquels les mouvements sont les plus importants et de repérer des cas éventuels de discrimination à l'aide de la composante intergroupe que nous définissons à partir des comparaisons de revenus interpersonnelles observées entre des individus appartenant à des sous-groupes distincts.

Pour définir nos composantes de mouvements interpersonnels intra- et intergroupes, nous considérons que les mouvements de revenus entre une population de taille n et un individu additionnel (indicé par $n+1$) se déterminent en comparant (par paire) :

- le montant de son revenu en période finale avec celui de son revenu en période initiale : $M_1(x_{n+1}, y_{n+1})$;
- le montant de son revenu en période finale avec ceux des revenus en période initiale des n individus de la distribution d'origine : $M_1(x_i, y_{n+1})$ avec $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- les montants des revenus des n individus en période finale avec celui du revenu en période initiale de l'individu supplémentaire : $M_1(x_{n+1}, y_j)$ avec $j \in \{1, \ldots, n\}$.

En multipliant chacun de ces coefficients par un facteur de pondération et en les ajoutant un à un, nous obtenons la règle d'agrégation faible des mouvements personnels et interpersonnels, qui est une extension de la règle d'agrégation d'Ebert (2010) au cas bidimensionnel :

Axiome 2.3.10 – Agrégation faible– (AGG). *Pour tout $n \geqslant 1$, il existe des fonctions de pondération strictement positives $\gamma(n+1)$, $\delta(n+1)$ et $\xi(n+1) \in \mathbb{R}_{++}$, telles que :*

$$M_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, x_{n+1}, y_{n+1}) = \gamma(n+1)M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(n+1)\sum_{i=1}^{n} M_1(x_i, y_{n+1}) \\ + \delta(n+1)\sum_{j=1}^{n} M_1(x_{n+1}, y_j) + \xi(n+1)M_1(x_{n+1}, y_{n+1}) \; ; \tag{AGG}$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathbb{R}_{++}$.

La propriété de décomposition en sous-groupes qui s'ensuit découle directement de cette règle d'agrégation. Pour simplifier son exposé, la propriété de décomposition est formulée pour une population subdivisée en 2 sous-groupes. Elle se généralise néanmoins aisément à un nombre fini de sous-groupes. [38]

Axiome 2.3.11 – Décomposition interpersonnelle des mouvements – (IMD). *Pour toutes distributions de revenus $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ de taille n telles que $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont toutes 2 subdivisées en 2 sous-groupes, c.-à-d., $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ et $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2)$ avec $n(\mathbf{x}^1) = n(\mathbf{y}^1) \equiv n_1 \geqslant 1$ et $n(\mathbf{x}^2) = n(\mathbf{y}^2) \equiv n_2 \geqslant 1$, une mesure de mouvements est interpersonnellement décomposable, s'il existe des fonctions de pondération strictement positives et continues $\alpha^g(\boldsymbol{n})$ avec $g \in$*

38. Un raisonnement par récurrence rend en effet possible sa généralisation. Il en est de même pour le nombre de périodes.

$\{1,2\}$, *et* $\beta(\boldsymbol{n})$ *telles que :*

$$M_{n_1+n_2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha^1(\boldsymbol{n})\; M_{n_1}(\mathbf{x}^1,\mathbf{y}^1) + \; \alpha^2(\boldsymbol{n})\; M_{n_2}(\mathbf{x}^2,\mathbf{y}^2) \\ + \beta(\boldsymbol{n}) \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \; \left\{M_1(x_i^1,y_j^2) + M_1(x_j^2,y_i^1)\right\} \;\; ; \qquad \text{(IMD)}$$

où $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2)$ *représente le vecteur des tailles des distributions des 2 sous-groupes sur les 2 périodes.*

Pour faciliter l'interprétation de cette décomposition, les individus peuvent être classés par ordre croissant de leur revenu en période initiale. Des mesures de mouvements de revenus sont calculées au niveau individuel. Ces mesures peuvent soit exprimer le changement de revenu personnel dont fait l'expérience un seul et même individu (i) au cours de temps $(M_1(x_i,y_i))$, soit refléter un changement de revenu interpersonnel entre un individu (i) et un individu (j) ($M_1(x_j,y_i)$ avec $i \neq j$). En se basant sur de telles mesures de mouvements interpersonnels, il est possible de déterminer si la situation économique finale d'un individu (i) s'est améliorée (ou au contraire détériorée) par rapport à celle de l'individu (j) en période initiale. La définition des composantes de mouvements intra- et intergroupes correspond aux définitions usuelles. Les deux premiers termes à droite de l'égalité dans (IMD) représentent les mouvements de revenus observés à l'intérieur des sous-groupes 1 et 2. Leur addition constitue la *composante de mouvements interpersonnels intragroupe.* Dans chacun des sous-groupes, le revenu en période finale des individus d'un même sous-groupe est comparé avec le montant de revenu détenu en période initiale par l'ensemble des individus de ce sous-groupe (y compris son propre revenu en période initiale). La composante de mouvement intragroupe s'obtient donc en faisant la somme pondérée des mouvements personnels et interpersonnels de revenus au sein des sous-groupes. Les deux autres termes dans (IMD) représentent la *composante de mouvements interpersonnels intergroupe.* Cette composante tient compte de l'ensemble des mouvements de revenus entre les individus du sous-groupe 2 et ceux du sous-groupe 1. Pour faciliter les calculs, nous distinguons :

- les mouvements entre les revenus en période finale des individus du **sous-groupe 2** et les revenus en période initiale des individus du **sous-groupe 1**, captés par $M_1(x_i^1, y_j^2)$;
- les mouvements entre les revenus en période finale des individus du **sous-groupe 1** et les revenus en période initiale des individus du **groupe 2**, captés par $M_1(x_j^2, y_i^1)$.

En d'autres termes, $M_1(x_i^1, y_j^2)$ et $M_1(x_j^2, y_i^1)$ expriment l'envie (ou plus généralement la satisfaction) des individus d'un sous-groupe en période finale au regard de la situation économique des individus de l'autre sous-groupe en période initiale. La composante de mouvements intergroupes résulte finalement de la somme pondérée des mouvements de revenus entre les individus appartenant à des sous-groupes distincts. Dans le cas où les mouvements de revenus n'affectent pas la situation économique des individus des divers sous-groupes de la même manière, notre composante de mouvements intergroupes peut traduire un sentiment général de privation ou d'enrichissement.

Nous définissons ensuite la structure générale des mesures de mouvements interpersonnels en ne faisant appel qu'aux 4 des propriétés énoncées précédemment (valables aussi bien pour M que pour D).

Théorème 2.3.1 *Supposons que* $M_1(\cdot,\cdot)$ *satisfait* (NM) *et que* $\delta(1) = 1$*, alors* M *satisfait* (AGG)*,* (SMi) *et* (PP) *si et seulement si :*

$$M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(n) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_1(x_i, y_j) \ ; \tag{4}$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{++}^n$ *et* $\delta(n) = \frac{1}{n^2}$.

Preuve.

(Nécessité) : Supposons que $M_1(\cdot,\cdot)$ satisfait (NM) de telle sorte que $M_n(\mathbf{x},\mathbf{y})$ satisfait (AGG), (SMi) and (PP) pour tout $n \geqslant 1$.

Étape 1 : Nous définissons la structure générale des mesures de mouvements faiblement agrégeables en faisant appel à (NM) et (AGG).

Soient $\mathbf{x} := (x_1,\ldots,x_n)$ et $\mathbf{y} := (y_1,\ldots,y_n)$ les distributions de revenus en période initiale et en période finale. Pour démontrer cette première étape, nous adaptons la démonstration proposée dans la *Claim*(a) de la preuve de la Proposition 2 d'Ebert (2010, p. 98) au cas bidimensionnel et adoptons un raisonnement par récurrence. Notre hypothèse de récurrence est la suivante :

$$[\text{H}] : M_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=2}^{n} \sigma_j(n) \sum_{i=1}^{j-1} \{M_1(x_i,y_j) + M_1(x_j,y_i)\} + \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j(n)\, M_1(x_j,y_j),$$

tel que $\sigma_j(n+1) := \delta(j)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\gamma(k)\right)$ et $\vartheta_j(n) := \xi(j)\left(\prod_{k=j+1}^{n}\gamma(k)\right)$ avec $\prod_{k=j+1}^{n}\gamma(k) := 1$ pour $j+1 > n$.[39]

Initialisation : montrons que l'hypothèse [H] est vraie pour $n=2$ et $n=3$.

• Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned} M_n(x,y) = {} & \delta(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_1,y_2) + \delta(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_2,y_1) \\ & + \xi(1)\cdot\gamma(2)\cdot M_1(x_1,y_1) + \xi(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_2,y_2). \end{aligned}$$

Donc :

$$M_n(x,y) = \delta(2)\cdot M_1(x_1,y_2) + \delta(2)\cdot M_1(x_2,y_1) + \xi(1)\cdot\gamma(2)\cdot M_1(x_1,y_1) + \xi(2)\cdot M_1(x_2,y_2).$$

39. Ces conditions figurent en note de bas de page numéro 10 d'Ebert (2010, p.98).

• Pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} M_n(x,y) &= \delta(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_2,y_1) + \delta(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_1,y_2) + \delta(3)\cdot\gamma(4)\cdot M_1(x_1,y_3) \\ &+ \delta(3)\cdot\gamma(4)\cdot M_1(x_2,y_3) + \delta(3)\cdot\gamma(4)\cdot M_1(x_3,y_2) + \delta(3)\cdot\gamma(4)\cdot M_1(x_3,y_1) \\ &+ \xi(1)[\gamma(2)\cdot\gamma(3)]M_1(x_1,y_1) + \xi(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_2,y_2) + \xi(3)\cdot\gamma(4)\cdot M_1(x_3,y_3). \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} M_n(x,y) &= \delta(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_2,y_1) + \delta(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_1,y_2) + \delta(3)\cdot M_1(x_1,y_3) \\ &+ \delta(3)\cdot M_1(x_2,y_3) + \delta(3)\cdot M_1(x_3,y_2) + \delta(3)\cdot M_1(x_3,y_1) \\ &+ \xi(1)[\gamma(2)\cdot\gamma(3)]M_1(x_1,y_1) + \xi(2)\cdot\gamma(3)\cdot M_1(x_2,y_2) + \xi(3)\cdot M_1(x_3,y_3). \end{aligned}$$

• Pour $n + 1$:

Supposons notre hypothèse de récurrence vraie et envisageons à présent qu'un individu supplémentaire est introduit dans la population, tel que son revenu en période initiale [resp. finale] est x_{n+1} [resp. y_{n+1}]. D'après (AGG), nous pouvons écrire que :

$$
\begin{aligned}
M_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, x_{n+1}, y_{n+1}) &= \gamma(n+1) M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \delta(n+1) \sum_{i=1}^{n} M_1(x_i, y_{n+1}) \\
&+ \delta(n+1) \sum_{j=1}^{n} M_1(x_{n+1}, y_j) + \xi(n+1) M_1(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
&\overset{[\mathrm{H}]}{=} \gamma(n+1) \left[\sum_{j=2}^{n} \delta(j) \left(\prod_{k=j+1}^{n} \gamma(k) \right) \sum_{i=1}^{j-1} \{ M_1(x_i, y_j) + M_1(x_j, y_i) \} \right. \\
&+ \left. \sum_{j=1}^{n} \xi(j) \left(\prod_{k=j+1}^{n} \gamma(k) \right) M_1(x_j, y_j) \right] + \delta(n+1) \sum_{i=1}^{n} M_1(x_i, y_{n+1}) \\
&+ \delta(n+1) \sum_{j=1}^{n} M_1(x_{n+1}, y_j) + \xi(n+1) M_1(x_{n+1}, y_{n+1}) \\
&= \sum_{j=2}^{n} \delta(j) \left(\prod_{k=j+1}^{n+1} \gamma(k) \right) \sum_{i=1}^{j-1} \{ M_1(x_i, y_j) + M_1(x_j, y_i) \} \\
&+ \delta(n+1) \sum_{i=1}^{n} \{ M_1(x_i, y_{n+1}) + M_1(x_{n+1}, y_i) \} \\
&+ \sum_{j=1}^{n+1} \xi(j) \left(\prod_{k=j+1}^{n+1} \gamma(k) \right) M_1(x_j, y_j) \\
&= \sum_{j=2}^{n+1} \delta(j) \left(\prod_{k=j+1}^{n+1} \gamma(k) \right) \sum_{i=1}^{j-1} \{ M_1(x_i, y_j) + M_1(x_j, y_i) \} \\
&+ \sum_{j=1}^{n+1} \xi(j) \left(\prod_{k=j+1}^{n+1} \gamma(k) \right) M_1(x_j, y_j),
\end{aligned}
$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_{++}^n$ et $x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathbb{R}_{++}$. Remarquons que dans le cas où $n = 1$ nous pouvons écrire que $M_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \xi(1)\ M_1(x, y)$, nous déduisons donc que $\xi(1) = 1$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}_{++}$. En posant $\delta(j) \left(\prod_{k=j+1}^{n+1} \gamma(k) \right) =: \sigma_j(n+1)$

et $\xi(j)\left(\prod_{k=j+1}^{n+1}\gamma(k)\right) =: \vartheta_j(n+1)$, nous trouvons que :

$$M_{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{y},x_{n+1},y_{n+1}) = \sum_{j=2}^{n+1}\sigma_j(n+1)\sum_{i=1}^{j-1}\{M_1(x_i,y_j)+M_1(x_j,y_i)\} + \sum_{j=1}^{n+1}\vartheta_j(n+1)\ M_1(x_j,y_j). \tag{S1}$$

<u>Étape 2 :</u> Nous introduisons la symétrie entre les individus (SMi) pour affiner l'expression des mesures de mouvements. Supposons que M satisfait (SMi), alors d'après (S1) :

$$M_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=2}^{n}\sigma_j(n)\sum_{i=1}^{j-1}\{M_1(x_i,y_j)+M_1(x_j,y_i)\} + \sum_{j=1}^{n}\vartheta_j(n)\ M_1(x_j,y_j).$$

Notons que le premier terme à droite de l'égalité correspond en fait à :

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\tau_{ij}(n)M_1(x_i,y_j) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\tau_{ji}(n)M_1(x_j,y_i)$$

où $\tau_{ij}(n) := \sigma_j(n)$, $\tau_{ji}(n) := \sigma_i(n)$. Par (SMi) nous observons que $\tau_{ij}(n) = \tau_{ji}(n)$, c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\tau_{ij}(n)\cdot M_1(x_i,y_j).$$

De la même façon, le second terme à droite de l'égalité peut s'exprimer comme :

$$\sum_{j=1}^{n}\kappa_{jj}(n)\cdot M_1(x_j,x_j) = \sum_{i=1}^{n}\kappa_{ii}(n)\cdot M_1(x_i,x_i)\ ,$$

tel que $\kappa_{jj}(n) := \vartheta_j(n)$ et $\kappa_{ii}(n) := \vartheta_i(n)$, donc $\kappa_{ii}(n) \overset{\text{(SMi)}}{=} \kappa_{jj}(n)$. Soit de manière générale, pour $n \geqslant 1$:

$$M_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\tau_{ij}(n)\ M_1(x_i,y_j) + \sum_{j=1}^{n}\kappa_{jj}(n)\ M_1(x_j,y_j)\ . \tag{S2}$$

Étape 3 : Caractérisation de la structure générale de nos mesures de mouvements à l'aide de (AGG), (NM) et (SMi). Supposons que $M_1(\cdot,\cdot)$ satisfait (NM) et (SMi). Soient les distributions $\mathbf{x} = (x, \ldots, x \vdots x)$ et $\mathbf{y} = (x, \ldots, x \vdots y)$ telles que les tailles de chacune de ces deux distributions est $n+1$ avec $x \neq y$. D'après (AGG) nous avons :

$$\begin{aligned} M_{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \gamma(n+1)M_n((x,\ldots,x),(x,\ldots,x)) + n \cdot \delta(n+1)\left\{M_1(x,y) + M_1(x,x)\right\} \\ + \xi(n+1)M_1(x,y). \end{aligned}$$

En invoquant (NM) pour $M_1(\cdot,\cdot)$, il apparaît que :

$$M_{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left[n \cdot \delta(n+1) + \xi(n+1)\right] M_1(x,y). \tag{1}$$

Imaginons maintenant que la répartition des individus se modifie. Par exemple, envisageons le cas où $\tilde{\mathbf{x}} = (x, \ldots, x, \vdots x) = \pi\mathbf{x}$ et $\tilde{\mathbf{y}} = (y, x, \ldots, x \vdots x) = \pi\mathbf{y}$. Dans ce nouveau cas, la mesure de mouvements devient par (SMi) :

$$\begin{aligned} M_{n+1}(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}) &= \gamma(n+1)M_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \delta(n+1)[n \cdot M_1(x,x) \\ &\quad +(n-1)M_1(x,x) + M_1(x,y)] + \xi(n+1)M_1(x,x) \\ &\overset{(\mathrm{NM})}{=} \gamma(n+1)[\xi(n)M_1(x,y) + (n-1)\delta(n)M_1(x,y)] + \delta(n+1)M_1(x,y) \\ &\overset{(\mathrm{SMi})}{=} M_{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \ . \end{aligned}$$

D'où :

$$M_{n+1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \left[\gamma(n+1)\left\{\xi(n) + (n-1)\delta(n)\right\} + \delta(n+1)\right] M_1(x,y). \tag{2}$$

D'après (SMi), (1) et (2) conduisent à une même évaluation des mouvements de revenus, la différence entre ces 2 expressions est donc nulle. Soit :

$$\begin{aligned} &\left[n \cdot \delta(n+1) + \xi(n+1) - \gamma(n+1)\left\{\xi(n) + (n-1)\delta(n)\right\} - \delta(n+1)\right] M_1(x,y) = 0 \\ \iff &\left[(n-1) \cdot \delta(n+1) + \xi(n+1) - \gamma(n+1)\left\{\xi(n) + (n-1)\delta(n)\right\}\right] M_1(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Puisque $x \neq y$, il en résulte que $M_1(x,y) \neq 0$. Les termes entre crochets doivent par conséquent être nuls :

$$[(n-1)\cdot\delta(n+1)+\xi(n+1)-\gamma(n+1)\left\{(n-1)\cdot\delta(n)+\xi(n)\right\}]=0$$

Par (AGG), il vient :

$$\delta(n+1)=\gamma(n+1)\delta(n) \quad \text{et} \quad \xi(n+1)=\gamma(n+1)\xi(n).$$

Notons que lorsque $n = 1$:

$$\delta(2)=\gamma(2)\cdot\delta(1) \quad \text{et} \quad \xi(2)=\gamma(2)\cdot\xi(1)$$

or $\xi(1) = 1$ et par définition $\delta(1) = 1$, donc :

$$\delta(2)=\xi(2).$$

Par récurrence, nous déduisons donc que pour tout $n \geqslant 1$: $\delta(n) = \xi(n)$.[40] De plus :

$$\sigma_j(n)=\delta(j)\prod_{k=j+1}^{n}\gamma(k)=\delta(n) \quad \text{et} \quad \vartheta_j(n)=\xi(j)\prod_{k=j+1}^{n}\gamma(k)=\xi(n).$$

D'où :

$$\xi(n)=\xi(1)\prod_{k=2}^{j}\gamma(k)\prod_{k=j+1}^{n}\gamma(k)=\delta(1)\prod_{k=2}^{j}\gamma(k)\prod_{k=j+1}^{n}\gamma(k)=\delta(n) \tag{3}$$

Rappelons par ailleurs que $\sigma_j(n) =: \tau_{ij}(n)$; $\vartheta_j(n) =: \kappa_{jj}(n)$ et que $M_1(\cdot,\cdot)$ satisfait (NM). D'après (3) la relation (S2) se réécrit :

$$M_n(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta(n)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_1(x_i,y_j)\ ; \tag{S3}$$

40. Notons qu'Ebert (2010) ne distingue pas les fonctions de pondération se rapportant à $I(x,x,2)$ de celles se rapportant à $I(x,y,2)$. Une telle équivalence ne semble donc pas trop restrictive.

où $\delta(1) = 1$.

Étape 4 : Dans cette dernière étape, nous introduisons la propriété d'invariance par réplication (PP). D'après (PP), une mesure de mouvements de revenus n'est pas affectée par la concaténation des distributions de revenus sur chaque période. Soit $\mathbf{x}^{[m]}$ [resp. $\mathbf{y}^{[m]}$] la distribution de revenus initiale [resp. finale] concaténée m fois, avec $m \geqslant 2$, telle que $\mathbf{x}^{[m]} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{m \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{m \text{ fois}})$ avec $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{mn} \sum_{\ell=1}^{mn} M_1(x_k, y_\ell) = m^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_1(x_i, y_j) \ ;$$

et

$$M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_{mn}(\mathbf{x}^{[m]}, \mathbf{y}^{[m]}).$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\delta(n) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_1(x_i, y_j) =& \ \delta(mn) \sum_{k=1}^{mn} \sum_{\ell=1}^{mn} M_1(x_k, y_\ell) \\
\delta(n) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_1(x_i, y_j) =& \ \delta(mn) \cdot m^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_1(x_i, y_j) \\
\Longleftrightarrow \quad & \left[\delta(n) - \delta(mn) \cdot m^2\right] \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_1(x_i, y_j) = 0
\end{aligned}$$

En supposant $x_i \neq y_j$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, nous pouvons faire ressortir la même relation qu'Ebert (2010), à savoir :

$$\delta(mn) = \frac{\delta(n)}{m^2} \ .$$

De la même façon, pour des distributions de taille m concaténées n fois, nous obtenons :

$$\delta(mn) = \frac{\delta(m)}{n^2}.$$

Après égalisation des deux équations, nous trouvons :

$$n^2 \cdot \delta(n) = m^2 \cdot \delta(m).$$

Or, nous constatons que $n^2 \cdot \delta(n)$ ne dépend pas de m, donc, $n^2 \cdot \delta(n) = c$ pour $n \geqslant 1$. Pour $n = 1$ nous avons d'après (S3) $\delta(1) \cdot 1^2 = c$, d'où $c = 1$. Nous déduisons alors que $\delta(n) = \frac{1}{n^2}$. Finalement :

$$M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} M_1(x_i, y_j).$$

(Suffisance) : Par définition, lorsque deux revenus sont identiques en période initiale et en période finale, il y a absence de mouvement. La mesure $M_1(\cdot, \cdot)$ est donc nulle. Par conséquent, M_1 satisfait (NM). Compte tenu du fait que les mouvements (inter)personnels de revenus agrégés sont pondérés par $\delta(n) = \frac{1}{n^2}$, le respect de (PP) est assuré. Enfin, le respect de (AGG) et (SMi) découle directement de la structure de l'indicateur M. $\square$

La structure globale des mesures de mouvements correspond simplement à l'agrégation des mouvements de revenus personnels et interpersonnels, tels que les termes $M_1(x_i, y_j)$ fournissent une évaluation des mouvements interpersonnels de revenus. Comme cela a été mentionné précédemment, la règle de décomposition (IMD) se forme à partir de la propriété d'agrégation (AGG). Ces deux propriétés peuvent par conséquent être indifféremment utilisées pour caractériser les mesures de mouvements interpersonnels.

Lemme 2.3.1 *Si M satisfait* (4) *et $M_1(\cdot, \cdot)$ satisfait* (NM)*, alors M respecte* (NM), (SMi), (AGG) [ou (IMD)] *et* (PP).

Preuve.
(Nécessité) : Nous explicitons les expressions des fonctions de pondération.

Supposons une population subdivisée en 2 sous-groupes, de telle sorte que $\mathbf{x} := (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2)$ et $\mathbf{y} := (\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2)$ pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, avec n_1 [resp. n_2] la taille du sous-groupe 1 [resp. sous-groupe 2] et $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1)$ [resp. $(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2)$] les vecteurs de revenus du sous-groupe 1 [resp. sous-groupe 2]. D'après (IMD) :

$$\begin{aligned} M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha^1(n_1, n_2)\ M_{n_1}(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1) + \alpha^2(n_1, n_2)\ M_{n_2}(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2) \\ &\quad + \beta(n_1, n_2) \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \left\{ M_1(x_i^1, y_j^2) + M_1(x_j^2, y_i^1) \right\} \ . \end{aligned}$$

En reproduisant le raisonnement d'Ebert (2010), nous définissons :

$$\alpha^g(n_1, n_2) := \frac{\delta(n_1 + n_2)}{\delta(n_g)} \quad \text{pour} \quad g = 1, 2 \quad \text{et} \quad \beta(n_1, n_2) := \delta(n_1 + n_2)$$

pour $n_1 \geqslant 1$ et $n_2 \geqslant 1$.

La forme fonctionnelle des poids dans (IMD) et (AGG) se déduit directement de (4). Pour la décomposition (IMD) :

$$\begin{aligned} M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{(n_1)^2}{(n_1 + n_2)^2}\ M_{n_1}(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1) + \frac{(n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}\ M_{n_2}(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2) \\ &\quad + \frac{1}{(n_1 + n_2)^2} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \left\{ M_1(x_i^1, y_j^2) + M_1(x_j^2, y_i^1) \right\} \ , \end{aligned}$$

pour tout $(\mathbf{x}^1, \mathbf{y}^1) \in \mathbb{R}^{2n_1}_{++}$, $(\mathbf{x}^2, \mathbf{y}^2) \in \mathbb{R}^{2n_2}_{++}$ et $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ avec $n_1 + n_2 \geqslant 2$. De la même façon, pour la règle d'agrégation (AGG), il vient :

$$\begin{aligned} M_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, x_{n+1}, y_{n+1}) &= \frac{n^2}{(n+1)^2}\ M_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^{n} M_1(x_i, y_{n+1}) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=1}^{n} M_1(y_j, x_{n+1}) + \frac{1}{(n+1)^2}\ M_1(x_{n+1}, y_{n+1}) \ ; \end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathbb{R}_{++}$ et $n \geqslant 1$.

(Suffisance) : Comme indiqué par Ebert (2010) [p. 100], le respect de (NM), (SMi) , (IMD) ou (AGG) et (PP) découle directement de (4). □

Il est possible d'affiner la structure des mesures de mouvements interpersonnels proposée dans le Théorème 2.3.1 à l'aide de propriétés additionnelles. Nous parvenons notamment à faire ressortir les expressions de deux indicateurs précédemment introduits par Fields et Ok (1996,1999a,b). Pour obtenir des mesures de mouvements interpersonnels qui sont à la fois décomposables et cohérentes avec la littérature préexistante en termes de mouvements de revenus, nous nous concentrons désormais sur les mesures directionnelles. Pour décrire les phénomènes de croissance captés par leur mesure, Fields et Ok (1999b) introduisent une propriété de séparabilité spécifique, parfaitement compatible avec les formes de décompositions en sous-groupes (SD) ou (IMD). L'idée sous-jacente à cette propriété est la suivante : si l'ensemble des revenus d'une économie augmentent à un taux b entre les périodes 0 et 1, et à un taux a/b entre les périodes 1 et 2, alors, la mesure de mouvements est telle que le taux d'accroissement des revenus entre les périodes 0 et 2 est exactement égal à a. Les auteurs qualifient cette propriété de *multiplicative path separability*, que nous traduisons par : séparabilité par facteurs de proportionnalité.

Axiome 2.3.12 – Séparabilité par facteurs de proportionnalité –(MPS). *Pour une distribution de revenus* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$*, une mesure de mouvements est séparable par facteur de proportionnalité s'il existe* $a \geqslant 1$ *et* $b \in [1; a]$*, tels que :*

$$D_n(\mathbf{x}, a\mathbf{x}) = D_n(\mathbf{x}, b\mathbf{x}) + D_n(b\mathbf{x}, a\mathbf{x}). \qquad \text{(MPS)}$$

Cette propriété constitue une condition de séparabilité faible à partir de laquelle il est possible de déduire le taux de croissance sur l'ensemble des périodes de temps, à condition que le taux de croissance sur chaque sous-période soit connu [se reporter à Fields et Ok (1999b), p. 459]. En plus de permettre de suivre les différents stades de l'évolution des revenus dans le temps, cette règle de séparabilité incorpore également la condition de normalisation (NM) énoncée précédemment, comme nous le démontrons par la suite. L'ensemble des prérequis étant réunis, nous pouvons montrer que la mesure des changements par tête en logarithme des revenus agrégés de Fields et Ok (1999b) est compatible avec (IMD).

Proposition 2.3.1 *Supposons que $D_1^1(\cdot,\cdot)$ satisfait* (MPS)*, alors D^1 satisfait* (AGG) [*ou* (IMD)], (SMi), (PP) *et* (SI) *si et seulement si :*

$$D_n^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = c\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{\ln y_j - \ln x_i\}\right) \;;$$

pour tout $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}_{++}^n$ et $c > 0$.

Preuve.

(Nécessité) :

Soit $D_n^1 : \mathbb{R}_{++}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction directionnelle continue. Nous supposons que $D_1^1(x,y)$ satisfait (MPS) de telle sorte que D^1 respecte (AGG) [resp. (IMD)], (SMi), (PP) et (SI).

• <u>Étape 1 :</u> Nous montrons tout d'abord que (MPS) implique (NM) lorsque $a = b$. En effet :

$$D_1^1(x,ax) = D_1^1(x,ax) + D_1^1(ax,ax) \;;$$

soit :

$$D_1^1(ax,ax) = 0 \quad \text{pour tout} \quad a \geqslant 1 \;; \tag{S'1}$$

ce qui correspond bien à la propriété de normalisation (NM).

• Étape 2 : Nous définissons la structure générale de nos mesures directionnelles. Puisque $D_1^1(x,y)$ satisfait (MPS) [et donc (NM)], nous pouvons déduire du Théorème 2.3.1 que D^1 satisfait (AGG), (SMi), (PP), tel que :

$$D_n^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_1^1(x_i,y_j). \tag{S'2}$$

• Étape 3 : Nous introduisons à présent la propriété d'invariance d'échelle. En effet, d'après (S'2), si D_n^1 satisfait (SI), alors D_1^1 hérite de la propriété d'invariance d'échelle, telle que pour tout $x_i, y_j \in \mathbb{R}_{++}$ avec $i,j \in \{1,\ldots,n\}$:

$$D_1^1(\lambda x_i, \lambda y_j) = D_1^1(x_i,y_j) \quad \text{avec} \quad D_1^1(x_i,y_j) = D_1^1\left(1, \frac{y_j}{x_i}\right) \ , \text{ avec } \lambda > 0.$$

Nous postulons que $D_1^1(1, y_j/x_i) =: f\left(\frac{y_j}{x_i}\right)$. Ainsi :

$$D_n^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{y_j}{x_i}\right) \ , \tag{S'3}$$

avec $f : \mathbb{R}_{++}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f\left(\frac{c}{c}\right) \overset{(\mathrm{NM})}{=} 0$, pour $c > 0$.

• Étape 4 : Nous précisons la forme fonctionnelle de nos indicateurs à l'aide de la propriété de séparabilité par facteur de proportionnalité (MPS). Par (MPS) nous avons :

$$D_1^1(1,a) = D_1^1(1,b) + D_1^1(b,a) \ ,$$

où $a \geqslant 1$ et $b \in [1,a]$. D'après (S'3), nous obtenons :

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) \ ,$$

avec $a, b > 1$. Nous reprenons le raisonnement de Fields et Ok (1999, p. 467) et identifions une équation fonctionnelle de Cauchy dont la solution est $f(a) = c \cdot \ln(a)$ [*cf.* Aczèl (1966) p.39]. Finalement notre mesure directionnelle de mouvements interpersonnels s'écrit :

$$D_n^1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = c\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{\ln y_j - \ln x_i\}\right) \ ; \tag{4}$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$ et $c > 0$.

(Suffisance) :

Par construction, D^1 respecte (MPS), (AGG) [ou (IMD)], (SMi), (PP) et (SI). Afin de montrer l'indépendance des différents axiomes, nous proposons différents indices dont la structure est compatible avec 4 des 5 propriétés appelées dans le corps de la Proposition 2.3.1.

$$\begin{aligned}
D_n^{S1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\ln y_i - \ln x_i| \ ; && \text{(non AGG ; non IMD)}\\
D_n^{S2}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \{\ln y_j - \ln x_i\} \ ; && \text{(non PP)}\\
D_n^{S3}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (y_j - x_i) \ ; && \text{(non SI)}\\
D_n^{S4}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{2j+1}{2i+1}\ln\left(\frac{y_j}{x_i}\right) \ ; && \text{(non SMi)}\\
D_n^{S5}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left\{\ln\frac{y_j}{\mu(\mathbf{y})} - \ln\frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})}\right\} \ ; && \text{(non MPS)}
\end{aligned}$$

où $\mu(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{y})$ sont respectivement les moyennes arithmétiques des distributions $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$. $\square$

Rappelons que notre mesure directionnelle $D_n^1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ introduite par notre Proposition 2.3.1 est une reformulation de la mesure des changements par tête en logarithme des revenus agrégés, initialement proposée par Fields et Ok (1999b). L'intérêt principal de notre caractérisation est quelle permet d'expliciter les comparaisons interpersonnelles de revenus que les individus opèrent entre eux, à la suite d'une modification de leurs revenus personnels. Ces comparaisons sont en effet captées par les indicateurs $D_1(x_i, y_j)$ (avec $i \neq j$) qui viennent compléter les comparaisons personnelles de revenus $D_1(x_i, y_i)$ sur lesquelles se base l'expression initiale ($d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) de la mesure des changements par tête en logarithme des revenus agrégés de Fields et Ok (1999b). Ainsi, lorsque $D_1(x_i, y_j) > 0$ cela signifie que le revenu détenu en période finale par l'individu j surpasse celui détenu par l'individu i en période initiale. Ces indicateurs fournissent ainsi une évaluation de la progression (éventuelle) de chaque individu sur l'échelle sociale, relativement au reste de la société à laquelle ils appartiennent. L'emploi de tels indicateurs se révèle d'autant plus attrayante dans un contexte de mouvements intergénérationnels, où il est essentiel de pouvoir déterminer l'évolution de la situation socio-économique des enfants par rapport à celle de leurs proches (parents).

Corollaire 2.3.1 *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $n \geqslant 1$ *et* $c > 0$,

$$\begin{aligned}
D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = & \; c\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{\ln y_j - \ln x_i\}\right) \\
= & \; c\left(\frac{1}{n^2}\left\{n \cdot \sum_{j=1}^{n}\ln y_j - n \cdot \sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right\}\right) \\
= & \; c\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\ln y_i - \ln x_i\}\right) \\
= & \; d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ .
\end{aligned}$$

avec $d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *la notation empruntée par Fields et Ok (1999b) pour faire référence à leur mesure de mouvements directionnelle.*

La mesure $D_n^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ n'est cependant pas la seule mesure directionnelle de mouvements interpersonnels qui peut être définie à partir du Théorème 2.3.1. En substituant à l'invariance d'échelle (SI), une propriété d'invariance par translation (INV) et une propriété d'homogénéité linéaire (HL), nous obtenons une autre forme fonctionnelle assez proche de l'expression de certaines mesures plus usuelles, puisqu'il s'agit d'une différence de moyennes des revenus individuels entre la période initiale et la période finale.

Proposition 2.3.2 *Supposons que* $D_1^2(\cdot,\cdot)$ *satisfait* (MPS) *alors,* D_n^2 *respecte* (AGG) [*ou* (IMD)], (PP), (SMi), (INV) *et* (HL) *si et seulement si :*

$$D_n^2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = c\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - x_i)\right) \ ,$$

avec $c > 0$ *et* $D_n^2 : \mathbb{R}_{++}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une mesure directionnelle de mouvements.*

Preuve.

Pour cette nouvelle démonstration, nous faisons appel à certains résultats démontrés dans la preuve de la Proposition 2.3.1. Nous savons en effet que lorsque $D_1(\cdot,\cdot)$ satisfait (MPS) alors $D_1(\cdot,\cdot)$ satisfait (NM). De plus, si D_n satisfait (AGG) [ou (IMD)], (SMi) et (PP) alors :

$$D_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_1(x_i,y_j) \ .$$

En appliquant la propriété d'invariance par translation (INV) à D_n, nous déduisons que D_1 hérite de également de cette propriété tel que :

$$D_1(x_i-\varepsilon, y_j-\varepsilon) = D_1(x_i,y_j) \quad \text{pour tout } (i,j) \quad \text{et} \quad \varepsilon > 0.$$

En posant $\varepsilon = x_i$, il vient :

$$D_n(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_1(0, y_j - x_i)$$

Par (HL), il s'ensuit :

$$D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_i) D_1(0, 1).$$

En posant $D_1(0, 1) = c$, où c est une constante positive, nous obtenons finalement :

$$D_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = c \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_j - x_i) \right) \;;$$

pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$. $\square$

Pour illustrer nos propos, nous appliquons, dans le paragraphe suivant, les propriétés (SD) et (IMD) à un échantillon d'individus issus de l'enquête longitudinale BHPS. En comparant les résultats des deux schémas de décompositions obtenus à partir du même indicateur de mouvement directionnel, nous discutons des avantages et des inconvénients que recouvrent chacune des deux méthodes. L'interprétation des mesures directionnelles de mouvements en sous-groupes constitue un enjeux plus complexe que celle des mesures symétriques. Cette complexité s'explique, en partie, par le fait que des jugements normatifs [41] peuvent être rattachés à ces mesures [voir Fields et Ok (1999b) et Fields (2000)]. Une chose que ne permettent pas les mesures symétriques, puisque aucune distinction n'est faite entre les mouvements de revenus calculés en valeur absolue. Une attention particulière est donc portée au sens dans lequel s'effectuent les mouvements de revenus et à leur signification pour l'ensemble de la population de l'échantillon.

41. Les travaux d'Atkinson et Bourguignon (1982) et Atkinson (1983) sont parmi les premiers à attribuer des fondements bien-êtristes aux mesures de mobilité [voir Jäntti et Jenkins (2013) pour plus de détails].

2.3.3 Une illustration des avantages apportés par la décomposition interpersonnelle des mouvements

Si la littérature compte de nombreuses applications qui exploitent la base de données BHPS pour illustrer le fonctionnement des mesures de mobilité, rares sont celles qui emploient la mesure de mouvement directionnelle introduite par Fields et Ok (1999b). En dehors de Fields et Ok eux-mêmes, Van Kerm (2004) figure parmi les premiers chercheurs à utiliser l'indicateur de mouvements de revenus (sous sa forme symétrique). Dans ses récents travaux, l'auteur applique notamment la méthode de décomposition (additive) en sous-groupes ainsi qu'une autre méthode de décomposition en composante de croissance et de transferts propres aux indicateurs de Fields et Ok (1996, 1999). Van Kerm (2004) décrit cette mesure de mouvements comme un indicateur permettant d'évaluer l'ampleur des changements de revenus qui affectent les individus entre 2 périodes d'étude. Tout se passe alors comme si la mesure de mouvement globale résultait d'une « juxtaposition des expériences individuelles » sans qu'aucun lien ne soit établi entre elles, ce qui marque une rupture avec les autres concepts de mobilité [voir Van Kerm (2004) p. 231-232]. L'emploi de la forme symétrique de cet indicateur de mouvement est généralement préféré, car plus simple d'interprétation. La direction que les changements de revenus reflètent constitue néanmoins une part importante de l'analyse de la mobilité au sein d'une société. Aussi, afin de privilégier cet aspect et de déterminer la nature croissante ou plutôt décroissante des mouvements de revenus dans notre échantillon, nous adoptons la mesure de mouvements directionnelle D^1. Au cours de cette illustration, nous appliquons les deux formes analytiques de cet indicateur [$d_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $D_n^1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$] et les décomposons selon la méthode qui leur correspond [(SD) ou (IMD)]. Nous comparons, ainsi, les deux approches et discutons de leurs points forts ainsi que de leurs points faibles.

Notre variable d'étude est le revenu net annuel des ménages, tel qu'il est décrit à la section 2.2.3. Notre démarche pour former les échantillons à partir desquels les mouvements de revenus vont être évalués est identique[42] à celle présentée au cours de l'étude des inégalités de croissance ajustées. Pour les besoins de cette étude, nous distinguons désormais les unités bénéficiaires rattachées à un même ménage en fonction de leur statut économique. Le statut économique est défini par le département britannique du travail et des pensions[43]. Notre échantillon se décline ainsi en 8 sous-groupes. Dans un premier sous-groupe, nous rassemblons les unités bénéficiaires comprenant au moins un membre travaillant à temps partiel (codification :[44] `S|C PT`). Le second sous-groupe concerne les travailleurs indépendants (`1+Ftsemp`). Un troisième sous-groupe est réservé aux unités bénéficiaires dans lesquelles la personne célibataire ou le couple travaille à temps plein (`AlladFT`). Les couples dans lesquels un membre travaille à temps plein et l'autre n'exerce aucune activité professionnelle rémunérée sont regroupés dans un quatrième sous-groupe (`C1FT1notw`) alors que ceux dans lesquels un membre travaille à temps plein mais le second membre travaille à mi-temps appartiennent à un autre sous-groupe (`C1FT1PT`). Les trois derniers sous-groupes visent à distinguer, d'une part les unités bénéficiaires pour lesquelles la tête de l'unité ou le conjoint est âgé de 60 ans révolus (`Hd|Sp60+`), de celles concernant des individus (tête de l'unité) sans emploi (`HD|SpUne`) et d'autre part les unités ne correspondant à aucune des catégories mentionnées précédemment (`Other`). Pour constituer ces sous-groupes, nous suivons chacune des familles répertoriées sous un identifiant unique dans la base de données BHPS (identifiant `pid`) et comparons

42. Les valeurs aberrantes sont supprimées, 1% des valeurs de chaque extrémité des distributions de revenus sont éliminées sur chaque période, *etc.* [voir Section 2.2.3 pour plus de précisions].

43. se reporter au document "Department for Work and Pensions (2011)".

44. Il s'agit de la codification Stata proposée dans la base de données. Cette codification fait référence à la labélisation utilisée par le gouvernement que nous choisissons de réemployer (voir *DSS HBAI reports* mentionné par Jenkins et Levy (2012) p. 8).

le statut économique sous lequel elle est enregistrée pour l'année initiale de l'enquête (1991) à celui renseigné pour l'année finale (2008). Lorsque ces deux statuts coïncident, la famille est considérée comme représentative de ce statut économique et est placée dans le sous-groupe correspondant à ce même statut. Si, en revanche, une modification de ce statut est observée dans le temps, la famille est automatiquement placée dans le huitième sous-groupe. Ce huitième et dernier sous-groupe illustre donc avant tout un phénomène de mobilité sociale.

Dans un premier temps, seules les familles ayant participé à la fois à la première et à la dernière vague d'enquête sont conservées dans l'échantillon. Au total, notre échantillon comporte 4 436 observations (familles). Les statistiques de bases décrivant nos données sont les suivantes :

Statuts	`C1FT1notw`	`Other`	`1+FTsemp`	`AlladFT`
Effectifs	70	**3 303**	101	462
Part des *ss.*-groupes	1,6%	75%	2%	10%
Moyenne des revenus nets annuels en 1991 (en £)	12 297,8	13 530,8	14 108,6	16 210,9
Moyenne des revenus nets annuels en 2008 (en £)	17 170,8	16 736,7	19 008,4	22 226,2

Les effectifs de chaque sous-groupe représentent (excepté pour le sous-groupe `Other`) le nombre de familles dont le statut économique reste inchangé en 18 ans. Cela signifie que sur l'ensemble de la population échantillonnée, seuls 10% des familles −couples ou personnes célibataires avec ou sans enfant à charge− qui occupaient un emploi à temps plein en 1991 sont toujours en situation de plein emploi en 2008. Ces premiers chiffres peuvent sembler relativement

Statuts	HD|SpUne	Hd|Sp60+	C1FT1PT	S|C PT	**Total**
Effectifs	17	335	104	44	**4 436**
Part des groupes	0,4%	8%	2%	1 %	100%
Moyenne des revenus nets annuels en 1991 (en £)	8 425,4	10 678,5	12 185,6	12 263,5	**13 524,5**
Moyenne des revenus nets annuels en 2008 (en £)	8 346,9	13 398,4	19 822,2	16 299,9	**17 150,8**

Tableau 2.10 – **Statistiques élémentaires calculées à partir des données de la Grande Bretagne pour 1991 et 2008.**

faibles compte tenu de la politique en vigueur en Grande Bretagne. Rappelons en effet que de 1997 à 2010, le pouvoir est aux mains de Tony Blair, représentant du parti travailliste. Le gouvernement de l'époque met en place des plans économiques et sociaux dans le but de faire baisser le chômage et faire repartir la croissance du pays qui connaît une période de récession entre 1990 et 1992. [45] Des campagnes sont menées pour aider les jeunes à s'implanter sur le marché du travail. Les actions de Gordon Brown −chancelier de l'échiquier de 1997 à 2000− entraînent une diminution de l'impôt sur les sociétés et l'indépendance de la Banque de Grande Bretagne. Dans un tel contexte économique, on pourrait donc s'attendre à ce que le nombre de familles encore en situation de plein emploi en 2008 soit plus important. De manière générale, l'effectif de chaque sous-groupe est faible et n'excède pas 10%. Nous constatons en effet que la majorité des familles de Grande Bretagne (composant notre échantillon) font l'expérience de changements dans leur situation personnelle. Ces changements se répercutent sur le revenu disponible de ces familles qui sont automatiquement placées dans le sous-groupe "`Other`" où se concentrent les 3/4 de la

45. Source : Encyclopédie Larousse.

population échantillonnée (75%). Un fort taux de mobilité sociale est présent au sein de ce dernier sous-groupe.

Dans notre échantillon, le sous-groupe des familles qui travaillent à plein temps (`AlladFT`) détient en moyenne le plus fort revenu net annuel. La moyenne de ce sous-groupe évolue de 16 210,9£ en 1991 à 22 226,2£ en 2008. Les familles sans emploi (`HD|SpUne`) affichent en revanche les plus faibles revenus net annuels avec une moyenne de 8 425,4£ en 1991, qui se ramène ensuite à 8 346,9£ en 2008. Cette baisse ne concerne cependant que 17 familles de notre échantillon.

A l'exception du sous-groupe des familles sans emploi, l'ensemble des autres sous-groupes connaissent une croissance de la moyenne des revenus nets annuels. Ces chiffres illustrent l'efficacité des politiques mises en œuvre par le gouvernement de Tony Blair. Les statistiques officielles du chômage traduisent une baisse du taux de chômage à 5,5% en 2006 alors qu'il était supérieur à 10% au début des années 90 [voir, Azuelos (2007)]. De plus, comme le rappelle Azuelos (2007) le programme " *Welfare to Work*" ensuite rebaptisé "*New Deal*" encourage les individus à ne pas rester sans emploi. Une baisse des allocations compensatrices est, par exemple, appliquée lorsqu'une personne refuse trop fréquemment les offres d'embauches qui lui sont adressées. Pour enrichir notre analyse des mouvements de revenus au sein de notre échantillon, nous procédons à présent au calcul de la mesure directionnelle globale et de ses différentes composantes intra- et intergroupes.

Pour décomposer l'indicateur de mouvements directionnel selon le procédé proposé précédemment, nous modifions la macro commande Excel utilisée au chapitre 1 afin qu'elle prenne désormais en compte les écarts interpersonnels des logarithmes de revenus entre deux périodes. Les notions de distance économique directionnelle (d_{kh}) et de moment (d'ordre 1) de transvariation (p_{kh})

n'ont plus le même sens dans un contexte de mobilité. Leur définition se rapproche néanmoins de celle des composantes de croissance ($\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) et de transfert ($\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$) de Fields et Ok (1996, 1999). Notons que cette décomposition reste toujours valable lorsque l'indicateur est utilisé sous sa forme directionnelle. Nous pouvons, donc, adapter l'expression de ces composantes de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_n^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{y_i \geqslant x_j} \{\ln y_i - \ln x_j\} - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{x_j > y_i} \{\ln x_j - \ln y_i\} \\ &= \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ - \ \mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ ; \end{aligned}$$

dans le cas d'une économie de croissance. Des signes opposés doivent être appliqués aux deux composantes dans le cas d'une contraction de l'économie. Nous incluons ces expressions des composantes de croissance et de transfert à notre programmation [voir résultats en Annexes Tableaux 2.33 et 2.34]. Nous rajoutons ensuite deux lignes supplémentaires afin que l'exécution de la macro donne également le détail des composantes intragroupes engendrées par la décomposition additive (SD). Les principaux résultats sont résumés dans le tableau ci-après.

Statut	Total	`HD|SpUne`	`Hd|Sp60+`	`C1FT1PT`	`S|C PT`
Mesure de Mouvement	0,2468	0,0137	0,2341	0,4890	0,3444
Contribution F&O (d_W/d_T)	**100%**	0,0213%	7,1641%	4,6458%	1,3845%
Contribution intra (D_W^1/D_T^1)	**53,3549%**	0,0001%	0,5410%	0,1089%	0,0137%
Contribution inter (D_B^1/D_T^1)	**46,6451%**				

Nos calculs confirment les observations précédemment formulées à partir des moyennes de revenus. La valeur positive de l'indicateur de mouvement global de 0,2468 traduit une croissance des revenus nets annuels sur une période de 18 ans. Compte tenu du fait que $D^1 \in]-\infty; \infty[$, l'appréciation de l'intensité des

Statut	`C1FT1notw`	`Other`	`1+FTsemp`	`AlladFT`
Mesure de Mouvement	0,3428	0,2280	0,2997	0,3083
Contribution F&O (d_W/d_T)	2,1919%	68,8142%	2,7655%	13,0127%
Contribution intra (D^1_W/D^1_T)	0,0346%	51,2384%	0,0630%	1,3552%

Tableau 2.11 – **Contributions intra- et intergroupes des composantes de mouvement directionnelles.**

mouvements des revenus individuels est soumise au jugement de l'analyste. Au regard des coefficients calculés au sein des différents sous-groupes, nous pouvons considérer que la croissance des revenus nets annuels en Grande Bretagne, tous statuts économiques confondus, est faible. La plupart des sous-groupes affichent en effet des mesures de mouvement directionnelles supérieures à cet indicateur de croissance global. Sur l'ensemble de notre échantillon, l'indicateur de mouvement le plus élevé atteint une valeur de 0,4890. Il concerne le sous-groupe des familles formées par un couple dans lequel un membre est employé à temps plein, tandis que l'autre travaille à mi-temps (`C1FT1PT`) – situation constatée en 1991 et toujours d'actualité en 2008. Cette croissance globale des revenus nets annuels est conditionnée par l'instauration d'un salaire minimum à partir de 1999. Ce salaire minimum est initialement fixé à 3,20£ (3£ pour les personnes âgées de moins de 22 ans[46]). Il est, ensuite, révisé chaque année par la "*Low Pay Commission*". Cette mise en place d'un salaire minimum conforte les aménagements des conditions de travail entrepris 2 ans auparavant par le gouvernement britannique (par exemple : la durée maximale de travail hebdomadaire est fixée à 48h, le droit de grève et syndicalisation sont reconnus au même titre que le droit aux congés payés, *etc.*).

En privilégiant la méthode de décomposition faible à la méthode additive utilisée par Fields et Ok (1999b), nous décomposons la mesure directionnelle de

46. Voir Azuelos (2007) pour plus de détails.

mouvement globale en deux composantes : une composante intragroupe et une composante intergroupe. La composante intragroupe capte plus de la moitié des mouvements globaux. Sa contribution représente 53,35% de l'ensemble des mouvements évalués au sein de notre échantillon. La contribution de la composante intergroupe au mouvement de croissance total est donc de 46,65%. En d'autres termes, l'application de la décomposition faible révèle qu'au sein de notre échantillon, la plupart des familles font l'expérience d'une progression de leur revenu net annuels entre 1991 et 2008. De plus, cette progression s'observe à la fois entre des familles qui partagent un même statut économique et entre des familles de statuts économiques différents. La décomposition additive adoptée par Fields et Ok (1999b) ne donne pas lieu à de telles conclusions. Une seule composante de nature intragroupe ressort à l'issue de la décomposition additive. Ce procédé se révèle donc plus restrictif puisqu'il ne prend en compte que les interactions entre les familles de même statut économique.

Notre décomposition offre une nouvelle interprétation des mouvements de revenus. Nous considérons que, pour déterminer si sa situation personnelle a évolué favorablement au cours du temps, une famille ne se contente pas de comparer le revenu qu'elle détient aujourd'hui avec celui qu'elle détenait hier. Nous faisons l'hypothèse qu'elle cherche à savoir comment sa situation personnelle a évolué, au regard de celles des autres familles de la population. Elle va alors, comparer le revenu qu'elle détient aujourd'hui avec chacun des revenus que possédaient les autres familles de la population hier (y compris le sien). A l'issue de telles comparaisons, chaque famille peut se positionner au sein de la nouvelle distribution de revenus (celle de 2008) et juger de l'impact de l'évolution de sa situation personnelle relativement à la place qu'occupaient les autres familles au sein de l'ancienne distribution de revenus (celle de 1991). Prenons, par exemple, le cas d'une famille dont le revenu net annuel en 2008 est supérieur à celui qu'elle possédait en 1991. Cette famille va chercher à savoir si à la suite de cet accroissement de revenu, elle possède désormais un revenu plus important que ceux des familles qui bénéficiaient de revenus supérieurs au sien en 1991, ou si au contraire, en dépit de cette hausse, elle se situe toujours au même niveau (voire à un niveau moins avancé) sur l'échelle sociale.

De ce fait, lorsqu'une mesure de mouvements de revenus est positive (resp. négative), cela signifie que la majorité des familles bénéficient d'une croissance (resp. subissent une baisse) de leur revenu net annuel, les unes par rapport aux autres. Sur notre échantillon, nous constatons que l'ensemble des composantes intragroupes sont positives. Tous les sous-groupes bénéficient d'une croissance plus ou moins importante de leur revenu net annuel. Un constat analogue peut être formulé à partir des composantes intragroupes de la décomposition additive. Le recours à la décomposition faible nous permet, cependant, de nuancer certains résultats. Les contributions des uniques composantes intragroupes de la décomposition additive du mouvement global laissent à penser que 68,81% des mouvements de croissance ont lieu à l'intérieur du sous-groupe des familles sans statut fixe (`Other`). Les 31,19% restants sont répartis de manière assez homogène entre les autres sous-groupes, exception faite des sous-groupes `AlladFT` et `Hd|Sp60+`. Les contributions de ces deux sous-groupes expliquent respectivement 13,01% et 7,16% de la totalité des mouvements de revenus de notre échantillon, au vu de la méthode de décomposition utilisée [cf. Tableau 2.11]. C'est, sans surprise, que nous notons une contribution quasi-inexistante du sous-groupe des familles sans emploi (`HD|SpUne`).

Au regard de ces résultats, les contributions des composantes intragroupes qui découlent de la décomposition interpersonnelle des mouvements apparaissent plus modérées. Pour une grande partie des sous-groupes, leur valeur n'excède pas 1,4% du mouvement de croissance total. Le rôle joué par le sous-groupe des familles sans statut économique fixe (`Other`) reste incontestable. A lui seul il concentre plus de la moitié des mouvements de revenus (51,24%). L'explication de ces écarts entre les contributions des composantes, pourtant de même nature se trouve dans l'analyse des contributions intergroupes (voir Tableaux 2.12 et 2.35 en Annexes). L'étude de ces contributions nous apprend par exemple que les faibles mouvements de croissance notés à l'intérieur du sous-groupe des familles sans emploi sont contrebalancés par des mouvements de décroissance. Les revenus nets annuels des membres de ce sous-groupe restent inférieurs à ceux des autres sous-groupes de notre échantillon. Bon nombre des coefficients intergroupes calculés entre ce sous-groupe et les autres sous-groupes sont négatifs (`HD|SpUne` en 2008 *vs* autres statuts en 1991).

		Période finale							
Période initiale	100,00%	HD|SpUne	Hd|Sp60+	C1FT1PT	S|C PT	C1FT1notw	Other	1+Ftsempl	AlladFT
	HD|SpUne	–	0,1239%	0,0723%	0,0218%	0,0398%	1,7247%	0,0599%	0,3527%
	Hd|Sp60+	-0,0616%	–	1,0276%	0,2615%	0,5168%	21,3438%	0,7941%	5,1823%
	C1FT1PT	-0,0331%	0,0847%	–	0,0450%	0,1029%	3,9107%	0,1635%	1,2290%
	S|C PT	-0,0100%	0,1150%	0,1234%	–	0,0601%	2,4355%	0,0931%	0,6292%
	C1FT1notw	-0,0211%	0,0804%	0,1644%	0,0334%	–	2,8628%	0,1171%	0,8595%
	Other	-1,1253%	1,2332%	6,9640%	1,2379%	2,9641%	–	4,7536%	37,0256%
	1+Ftsempl	-0,0362%	0,0033%	0,2023%	0,0333%	0,0835%	3,0199%	–	1,0848%
	AlladFT	-0,2410%	-1,4760%	0,4623%	-0,0434%	0,0701%	-0,8890%	0,1679%	–

Tableau 2.12 – **Contributions des mouvements intergroupes au mouvement intergroupe global** $D^1(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^h)/D^1_B$

En d'autres termes, les revenus nets annuels détenus en 2008 par la majorité des familles de ce sous-groupe sont inférieurs aux montants des revenus nets détenus en 1991 par les membres des autres sous-groupes. Les contributions de ces mouvements à la baisse restent néanmoins inférieures à 2% de l'ensemble des mouvements intergroupes (voir Tableau 2.35). De la même façon, nous ne constatons aucune évolution entre les revenus des familles dont un membre a au moins 60 ans et ceux des familles travaillant à temps plein (`Hd|Sp60+` en 2008 *vs* `AlladFT` en 1991). Malgré la hausse générale des revenus des membres du sous-groupe `Hd|Sp60+`, ces revenus restent insuffisants pour dépasser (ou juste égaler) les montants de revenus du sous-groupe `AlladFT`. En définitive, les mouvements de revenus entre ces deux sous-groupes représentent une diminution des mouvements intergroupes globaux de 1,5%. Ce faible pourcentage est compensé par des mouvements de revenus non négligeables en faveur de la croissance, observés entre les autres sous-groupes.

Plus de 17% des mouvements de croissance totaux (soit environ 37% du total des mouvements intergroupes) se produisent entre les familles qui travaillent à temps plein et celles sans statut fixe (*c-à-d.*, `AlladFT` en 2008 *vs* `Other` en 1991, voir Tableaux 2.12 et 2.35) . Les comparaisons opposant les familles du sous-groupe `Other` en 2008 à celles du sous-groupe `Hd|Sp60+` en 1991 révèlent que les familles sans statut fixe maintiennent des revenus nets supérieurs à ceux des familles dans lesquelles un des membres est âgé de 60 ans ou plus. L'indicateur de mouvements entre ces deux sous-groupes est positif. Sa contribution avoisine 10% de la totalité des mouvements de revenus constatés dans notre échantillon (soit 21,34% de l'ensemble des mouvements intergroupes). En fin de compte, les nouvelles réglementations du travail mises en place par le gouvernement de Tony Blair et l'instauration d'un salaire minimum semblent avoir bien profité aux familles en situation de plein emploi composant notre échantillon (`AlladFT`). Nous pouvons également penser que la décision du gouvernement de diminuer l'impôt sur le revenu des ménages les plus modestes et de réduire les avantages fiscaux dont bénéficient certains ménages aisés à partir de 2001,[47] encourage les mouvements de croissance de revenus constatés entre la plupart des sous-groupes formés sur l'échantillon.

Cette première analyse des revenus nets annuels des familles britanniques met en avant l'existence de mouvements de revenus bien réels affectant une partie de la population de Grande Bretagne. Ces mouvements s'observent tant sur le plan personnel que sur le plan financier. Rappelons que, près des trois quart des familles de notre échantillon ne conservent pas leur statut économique initial en l'espace de 18 ans.[48] Ce changement personnel se traduit par une nette croissance des revenus dans le sous-groupe `Other`. Pour mieux comprendre ce phénomène et ainsi approfondir notre étude, nous réitérons nos calculs de décomposition en nous focalisant exclusivement sur le sous-groupe des familles sans statut fixe (`Other`). Nous conservons le même intervalle de temps (18 ans) et choisissons de scinder ce sous-groupe selon les 8 catégories retenues précédemment que nous examinons dans le détail.

Nous commençons par étudier la composition du sous-groupe des 3 303 familles sans statut fixe (`Other`). L'ensemble des statuts économiques évoqués précédemment sont présents dans ce sous-groupe. Nous isolons, tout d'abord, chacun de ces statuts puis effectuons de nouveaux regroupements selon l'évolution suivie par les familles. Les intitulés des sous-groupes font référence au statut économique déclaré par les familles en 1991, à savoir : `S|C PT` (travailleurs à temps partiel), `1+Ftsempl` (travailleurs indépendants), `AlladFT` (travailleurs à temps plein), `C1FT1notw` (couples pour lesquels un membre travaille à temps plein et l'autre n'exerce aucune activité professionnelle rémunérée), `C1FT1PT`

47. Voir Mougel (2005) pour plus d'informations à ce sujet.

48. Le critère du statut économique fait également parti des critères de segmentations retenu par Ramos (1999). L'auteur constate ce même phénomène de changement de statut sur ces échantillons et qualifie les individus concernés de "switchers".

(couples pour lesquels un membre travaille à temps plein tandis que le second membre travaille à mi-temps), `Hd|Sp60+` (travailleurs de plus de 60 ans), `HD|SpUne` (sans emploi). Pour éviter toute confusion avec l'étude précédente, nous notons `SSF` le sous-groupe des familles dont le statut ne correspond à aucun des 7 statuts établis par le HBAI. La répartition des différents statuts économiques est la suivante : [49]

Statut 1991	S|C PT						
Statuts 2008	HD|SpUne	C1FT1PT	AlladFT	C1FT1notw	SSF	1+Ftsempl	Hd|Sp60+
Effectifs	11	15	65	15	22	17	130

Tableau 2.13 – **Evolution de la répartition des 275 familles appartenant au sous-groupe `S|C PT` en 1991.**

Statut 1991	1+Ftsempl						
Statuts 2008	SSF	AlladFT	S|C PT	HD|SpUne	C1FT1PT	C1FT1notw	Hd|Sp60+
Effectifs	35	163	44	13	40	40	110

Tableau 2.14 – **Evolution de la répartition des 445 familles appartenant au sous-groupe `1+Ftsempl` en 1991.**

Statut 1991	AlladFT						
Statuts 2008	HD|SpUne	SSF	C1FT1notw	S|C PT	1+FTsempl	C1FT1PT	Hd|Sp60+
Effectifs	25	62	116	90	113	185	218

Tableau 2.15 – **Evolution de la répartition des 809 familles appartenant au sous-groupe `AlladFT` en 1991.**

49. Les statistiques descriptives relatives aux différents statuts sont consultables en Annexes, Tableaux 2.36,2.37, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41, 2.42, 2.43.

Statut 1991	C1FT1notw						
Statuts 2008	HD|SpUne	AlladFT	SSF	1+FTsempl	S|C PT	C1FT1PT	Hd|Sp60+
Effectifs	18	156	53	65	62	86	178

Tableau 2.16 – **Evolution de la répartition des 618 familles appartenant au sous-groupe `C1FT1notw` en 1991.**

Statut 1991	C1FT1PT						
Statuts 2008	HD|SpUne	C1FT1notw	AlladFT	S|C PT	SSF	1+FTsempl	Hd|Sp60+
Effectifs	22	71	241	80	58	52	134

Tableau 2.17 – **Evolution de la répartition des 658 familles appartenant au sous-groupe `C1FT1PT` en 1991.**

Statut 1991	Hd|Sp60+		
Statuts 2008	SSF	AlladFT	S|C PT
Effectifs	3	2	3

Tableau 2.18 – **Evolution de la répartition des 8 familles appartenant au sous-groupe `Hd|Sp60+` en 1991.**

Statut 1991	HD|SpUne						
Statuts 2008	S|C PT	SSF	AlladFT	C1FT1notw	Hd|Sp60+	1+FTsempl	C1FT1PT
Effectifs	15	39	57	27	37	18	27

Tableau 2.19 – **Evolution de la répartition des 220 familles appartenant au sous-groupe `HD|SpUne` en 1991.**

1991	SSF							
2008	HD|SpUne	SSF	S|C PT	AlladFT	1+FTsempl	C1FT1notw	C1FT1PT	Hd|Sp60+
Eff.	17	39	20	77	9	13	29	63

Tableau 2.20 – **Evolution de la répartition des 267 familles appartenant au sous-groupe SSF en 1991.**

Les différents statuts reflètent des effectifs très variables, soumis à l'influence du temps. Un nombre grandissant de familles se voient placées dans le sous-groupe Hd|Sp60+. A l'inverse, les quelques membres de ce sous-groupe en 1991 troquent leur statut d'inactif pour un statut d'actif. A l'échelle de l'ensemble de la population échantillonnée, ce chiffre ne concerne qu'une infime minorité de familles. Comme le fait remarquer Dupont (2003a, p.4) « [l]e taux d'emploi des britanniques de 15 à 64 ans est parmi les plus élevés d'Europe et atteint 73% de la population [...] avec une forte participation au marché du travail des plus de 50 ans ». Le facteur taille n'a de plus aucune influence sur les indicateurs de mouvements de revenus globaux de ces divers sous-groupes. Les calculs des différentes composantes présentés en Annexes (§ 2.5.2) montrent que ces mouvements sont essentiellement de nature intergroupe.

Statuts 1991	S|C PT	1+FTsempl	AlladFT	C1FT1notw
Effectifs	275	445	809	618
Mesures de mouvement	0,3091	0,2460	-0,0164	0,2387

Statuts 1991	`C1FT1PT`	`Hd|Sp60+`	`HD|SpUne`	`SSF`
Effectifs	658	8	220	267
Mesures de mouvement	0,2316	0,0929	0,5003	**0,5852**

Tableau 2.21 – **Effectifs et mesures de mouvements relatifs au statut des familles en 1991.**

Les indicateurs de mouvements de certains sous-groupes dépassent largement la mesure de mouvements globale (pour rappel : $D^1_n(\mathbf{x},\mathbf{y})$=0,2468). Le sous-groupe des familles dont le statut est indéfini en 1991 (`SSF`) se démarque des autres avec un coefficient de mouvements positif d'une valeur de 0,5852. Les familles de ce sous-groupe font l'expérience de mouvements à la hausse de leur revenu net annuel sur notre période d'étude. En 18 ans, la plupart des familles du sous-groupe `SSF` se positionnent sur le marché du travail. Un faible pourcentage (3,37%) des familles sont devenues autoentrepreneurs et génèrent d'importants mouvements de croissance relativement aux autres sous-groupes ($D^1(\mathbf{x}^{\texttt{SSF}},\mathbf{y}^{\texttt{1+FTsempl}}) = 0,9346$, voir Tableau 2.43 pour plus de détails). Les familles qui occupent un poste à temps plein en 2008 représentent 30% de l'effectif total du sous-groupe `SSF` et affichent un coefficient de mouvements presque aussi élevé ($D^1(\mathbf{x}^{\texttt{SSF}},\mathbf{y}^{\texttt{AlladFT}}) = 0,8602$) que celui des familles dont l'activité est partagée entre temps plein et temps partiel, mais dont l'effectif est plus faible ($D^1(\mathbf{x}^{\texttt{SSF}},\mathbf{y}^{\texttt{C1FT1PT}}) = 0,8084$). Compte tenu de la longueur de notre intervalle de temps, une part non négligeable des familles de ce sous-groupe (environ 1/4 de l'effectif total du sous-groupe) atteignent des âges avancés et font valoir leur droit à la retraite (voir Tableau 2.20). Ces changements de situation professionnelle sont fortement liés à d'autres changements survenus sur le plan personnel. L'examen des différents profils individuels renseignés par les familles de notre échantillon nous permet de mieux comprendre les mouvements de revenus constatés.

Prenons par exemple le sous-groupe `SSF`. Les familles de ce sous-groupe correspondent à des profils très variés : personne célibataire (homme ou femme) sans enfant, personne célibataire avec enfant(s), couple avec enfant(s), couple sans enfant, *etc.* Lorsque nous suivons de plus près les mutations de ces familles, nous constatons que, sur les 38 hommes qui se déclarent célibataires (et sans enfant) en 1991, seuls 11 d'entre eux déclarent se trouver toujours dans cette situation en 2008. Les 27 autres se déclarent en couple (avec ou sans enfant). Un constat analogue tient pour les femmes célibataires appartenant à ce sous-groupe (seules 6 des 54 femmes de ce sous-groupe sont encore célibataires et sans enfant en 2008). Une nuance est introduite pour les familles monoparentales. Au terme de notre période d'étude, bon nombre des enfants à charge en 1991 sont majeurs en 2008 et ne sont plus associés au foyer parental. Ces commentaires se généralisent à l'ensemble des sous-groupes. Il est notamment intéressant d'étudier les profils des 8 familles qui composent le sous-groupe `Hd|Sp60+`. Dans ce sous-groupe 7 des 8 familles qui formaient un couple en 1991 se sont séparées en 2008 en raison d'un décès ou d'une décision personnelle. A la suite de tels événements, les membres isolés de ces famille ont choisi de reprendre une activité professionnelle et parfois même de refaire leur vie, ce qui explique les mouvements de revenus relevés dans ce sous-groupe.

La perception des contributions des composantes intra- et intergroupes diffère une nouvelle fois selon le mode de décomposition choisi. Une nette dominance des mouvements de nature intergroupe apparaît à l'issue de la décomposition interpersonnelle (IMD). Ces mouvements sont principalement générés par le sous-groupe des familles qui obtiennent un poste à temps plein et dont l'évolution des revenus est la plus conséquente, relativement aux revenus des autres familles. Les écarts notables entre les contributions intragroupes obtenues avec la décomposition interpersonnelle et la décomposition additive peuvent s'expliquer par la structure des facteurs de pondération. Les tailles des sous-groupes influent de manière significative sur le classement des composantes. Cette influence semble plus forte sur les composantes de la décomposition interpersonnelle. Rappelons en effet que pour notre procédé de décomposition, les facteurs de pondération sont définis à partir des tailles des sous-groupes élevées au carré. Les coefficients non pondérés [50] peuvent être utilisés pour pallier l'influence de ce facteur taille. Les interprétations et conclusions que nous obtenons à l'appui des coefficients pondérés offrent néanmoins une bonne représentation des mouvements de revenus en Grande Bretagne et tiennent compte de la composition de la population (échantillonnée), que nous souhaitons faire ressortir ici.

Pour clore notre étude, nous confrontons les dix-huit vagues d'enquête par paires [51] successives afin de déterminer la tendance globale des mouvements de revenus au sein de notre échantillon. Nous ne retenons que les familles qui font également parties de la première et de la dernière vague. Les tailles des échantillons varient donc entre 4 273 et 3 952 familles selon les années de sondage (voir détails en Annexes Tableaux 2.44 à 2.60).

Années	**91-92**	**92-93**	**93-94**	**94-95**	**95-96**	**96-97**	**97-98**	**98-99**	**99-00**
Effectifs	4 167	3 952	3 959	3 910	3 996	4 054	4 053	4 008	3 978
$D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	0,0101	0,0164	0,0002	0,0113	0,0258	0,0270	-0,0085	0,0365	0,0522

50. Les valeurs de ces coefficients sont également disponibles à partir de la macro reparamétrée.

51. Cette pratique est courante dans les applications sur la mobilité, voir entre autres, Jarvis et Jenkins (1998), Ramos (1999), Chen (2009), *etc.*

Années	**00-01**	**01-02**	**02-03**	**03-04**	**04-05**	**05-06**	**06-07**	**07-08**
Effectifs	3 971	3 960	3 957	3 965	4 010	4 092	4 132	4 273
$D_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	0,0305	0,0423	0,0021	0,0089	0,0185	0,0057	-0,0105	0,0127

Tableau 2.22 – **Mouvements de revenus par paires de vagues d'enquête.**

Si les mouvements de croissance restent dominants tout au long de notre période d'étude, de faibles mouvements de décroissance apparaissent entre 1997 et 1998 d'une part et entre 2006 et 2007 d'autre part. Finalement, nous parvenons aux mêmes conclusions que Böheim et Jenkins (2006). Les mouvements de revenus en Grande Bretagne sont très faibles d'une année sur l'autre. Cela s'explique en grande partie par le fait que les familles connaissent généralement peu de changements de situation professionnelle ou personnelle en l'espace d'une année. Les mouvements de croissance de revenus en Grande Bretagne ne s'observent réellement que sur une période d'au moins 10 ans.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans un univers dynamique et nous nous interrogeons sur les apports de la propriété de décomposition faible en sous-groupes dans un tel cadre d'étude. Au cours de notre développement, nous nous concentrons sur la notion de croissance de revenus. Notre travail de réflexion s'appuie essentiellement sur des travaux préexistants qui se révèlent parfaitement compatibles avec le schéma de décomposition faible développé par Ebert (2010). Nous nous intéressons, tout d'abord, aux mesures d'inégalité de croissance ajustée des revenus suggérées par Demuynck et Van de gaer (2012). Ces auteurs caractérisent une famille de mesures dérivées des indicateurs de type $S-$Gini en faisant notamment appel au théorème de Donaldson et Weymark (1980). En optant pour une structure dépendant du rang, Demuynck et Vand de gaer (2012) envisagent l'application de pondérations différentes selon le niveau de croissance ajustée des revenus retenu pour chaque individu. Plutôt que de faire appel à la structure dépendant du rang des mesures de type $S-$Gini, nous privilégions la propriété de décomposition faible en sous-groupes pour identifier les individus (ou plus généralement les sous-groupes d'individus) qui sont les plus affectés par des inégalités de taux de croissance ajustée et donc *a fortiori* dont les taux de croissance (ajustée) sont les plus faibles (ou les plus élevés). Pour simplifier notre démarche, nous limitons notre analyse à deux classes de mesures dont la structure s'apparente à celle de l'indicateur de Gini absolu (GMD), lorsqu'il est appliqué dans un contexte d'inégalités de croissance ajustée. Si le cadre d'étude diffère entre le présent chapitre et le chapitre précédent, il n'en reste pas moins que la structure de l'indice de Gini absolu satisfait la propriété de désagrégation faible d'Ebert (2010). En nous appuyant sur les travaux d'Ebert (2010) ainsi que sur ceux de Chakravarty *et al.* (2013) nous avons, à notre tour, caractérisé axiomatiquement deux formes fonctionnelles, désormais décomposables en sous-groupes, qui restent cohérentes avec la notion de croissance ajustée des revenus.

Nos mesures (G_n^{API} et G_n^{MPI} définies pour $\delta = 2$ et $r > 0$) fournissent une évaluation de la dispersion des niveaux de croissance ajustée des revenus individuels à l'intérieur et entre les différents sous-groupes formés à partir d'une population mère. En dépit des facilités calculatoires (et d'interprétation) qu'offrent ces mesures, l'application de tels indicateurs dans un contexte d'inégalité de croissance ajustée ne permet pas d'analyser en détail les changements qui affectent les revenus individuels au cours du temps. La portée de l'introduction de la décomposition faible est donc limitée. Pour pallier cet inconvénient, nous optons pour une autre approche qui met clairement en avant les mouvements de revenus en revisitant la mesure de mouvements directionnelle de Fields et Ok (1999b).

Les mesures directionnelles s'opposent aux mesures symétriques. Comme leur nom l'indique, elles permettent de déterminer si les mouvements de revenus sont des mouvements en faveur de la croissance ou au contraire, s'ils traduisent une décroissance des revenus. Fields et Ok (1999b) démontrent qu'il est possible de définir une intéressante mesure de mouvement directionnelle sur la base de 4 axiomes dont une propriété de décomposition en sous-groupes (SD), qui s'apparente à la décomposition additive de Shorrocks (1980,1984). L'application de cette décomposition ne permet de définir qu'une seule composante de mouvements intragroupe.

L'enjeu représenté par l'adaptation de la décomposition faible à de telles mesures est donc double. Pour pouvoir définir la composante de mouvements intergroupes, nous devons, au préalable, introduire une nouvelle notion : celle de mouvement interpersonnel. Plutôt que de considérer qu'un individu se contente de comparer le niveau de son revenu personnel au temps t et au temps $t+1$ pour juger de son évolution, nous postulons que chaque individu compare son revenu en période finale à l'ensemble des revenus en période initiale des autres individus de la distribution. Ces comparaisons lui permettent de déterminer dans quelle mesure il a réussi à améliorer (ou dans le cas échéant à détériorer) sa situation économique, comparativement à l'ensemble de la population. En nous éloignant ainsi de la définition traditionnelle de la croissance individuelle, nous nous rapprochons de l'idée selon laquelle une mesure de mouvements se décompose en une composante de croissance et une composante de transferts. Ce schéma de décomposition est généralement préféré aux schémas de décompositions en sous-groupes. Par ailleurs il tend à négliger l'aspect individuel, indispensable à une bonne étude des mouvements de revenus. En nous appuyant une nouvelle fois sur les travaux d'Ebert (2010), nous proposons des adaptations des conditions d'agrégation faible et de décomposition en sous-groupes. Avec ces nouveaux axiomes, nous définissons une forme équivalente de l'indicateur de mouvements directionnel de Fields et Ok (1999b) qui intègre désormais dans son calcul les mouvements de revenus personnels et interpersonnels.

Pour illustrer nos propos, nous appliquons nos indicateurs – les indices d'inégalités de croissance ajustée et la mesure de mouvements directionnelle– aux revenus nets annuels de la Grande Bretagne. Nous utilisons les données issues de l'enquête longitudinale BHPS pour examiner l'évolution de la situation économique de la Grande Bretagne entre 1991 et 2008. Sur cette période, nous étudions parallèlement, les inégalités de croissance ajustées en fonction de la situation familiale des britanniques ainsi que les mouvements de revenus selon leur statut économique défini au sens du HBAI. Nous constituons, ainsi, 8 sous-groupes distincts pour chacune de nos applications. Ces groupes se veulent les plus représentatifs possible des différents profils individuels en Grande Bretagne. Ils nous permettent d'identifier des mouvements de croissance modérés entre les divers statuts économiques qui s'accompagnent par ailleurs d'inégalité de croissance plus prononcées pour l'ensemble de la population échantillonnée. Les mouvements de revenus semblent être générés aussi bien par des interactions interindividuelles à l'intérieur des sous-groupes (à 53%) que par des interactions entre ces sous-groupes (à 47%). Les inégalités de croissance ajustée se manifestent en revanche plus fortement au sein des sous-groupes d'individus qui partagent le même statut familial sur l'ensemble de la période 1991-2008 (61% des disparités sont de nature intragroupes).

Parmi les 4 436 familles qui composent notre échantillon, les familles en situation de plein emploi sont celles qui détiennent les plus hauts revenus. Les mouvements de revenus les plus importants sont, par ailleurs, observés pour les couples dont un membre travaille à temps plein tandis que l'autre occupe un poste à mi-temps. Dans l'ensemble les couples britanniques (avec ou sans enfant à charge) connaissent et entretiennent assez peu d'inégalités de croissance ajustée avec les autres sous-groupes. Ce sont essentiellement les familles monoparentales et les personnes retraitées vivant seules qui sont les plus touchées par les inégalités de croissance (ajustée).

Au cours de notre étude, nous insistons sur l'impact que le changement de situation professionnelle a sur la croissance des revenus. Cette relation est bien connue de la littérature sur l'économie du travail [voir entre autres, Bartel et Borjas (1981), Mincer et Jovanovic (1982) ou Holmlund (1984)]. Selon Ramos (1999) la prise en considération de cette relation permet d'établir des plans de réallocation des travailleurs sur des emplois laissés vacants ou dont la rentabilité est plus élevée selon les besoins du marché. Nous tenons également compte des changements de situation personnelle qui ont des répercussions non négligeables sur la situation économique et financière des individus. Finalement, notre adaptation de la propriété de décomposition faible en sous-groupes à un contexte de mobilité nous permet de fournir une analyse approfondie des mouvements de revenus en Grande Bretagne et de démontrer que ces mouvements peuvent aussi bien être de nature intragroupe que de nature intergroupe.

Dans le chapitre suivant, nous élargissons encore davantage le champ d'application de la propriété de décomposition faible en revenant sur ses fondements axiomatiques. La suite de notre travail porte notamment sur les fonctions de pondération qui définissent la structure des différentes composantes. Nous montrons qu'en adoptant une formulation plus générale, nous pouvons caractériser une large classe de mesures que s'appliquent aussi bien au domaine des inégalités, qu'à celui de la pauvreté ou encore de la diversité (entre autres). De plus, ces mesures ne sont plus contraintes d'être uniquement absolues ou relatives. Nous montrons, qu'en nous affranchissant des propriétés d'invariance traditionnelles, nous pouvons définir des mesures qui reflètent l'ensemble des jugements de valeur qui peuvent être exprimés par un planificateur social.

2.5 Annexes

2.5.1 Tableaux liés à l'illustration [Chap. 2, Sect. 2.3]

A titre illustratif nous faisons varier r entre 1 et 4 afin d'observer l'impact que ce paramètre peut avoir sur la structure de nos indicateurs. Néanmoins comme cela a pu être spécifié au cours de nos développement aucune dimension bien-êtriste pertinente ne peut être rattachée aux différentes valeurs que peut emprunter ce paramètre.

	API	MPI			
r	1	1	2	3	4
G_W/G_T	36,45%	36,35%	35,85%	34,64%	32,49%
G_B/G_T	63,55%	63,65%	64,15%	65,36%	67,51%

Tableau 2.23 – **Contributions des inégalités de croissance ajustée intra- et intergroupes pondérées aux inégalités totales entre 1991-1997.**

Remarque : Il est inutile de présenter les contributions lorsque r varie avec la transformation logarithmique impliquée par (API). En effet, avec cette transformation le paramètre r intervient comme un facteur multiplicatif. L'expression du rapport entre le coefficient intra- ou intergroupe relativement à celui des inégalités de croissance ajustée total reste donc invariant.

	API	MPI			
r	1	1	2	3	4
G_W/G_T	31,6%	31,8%	32,2%	32,6%	33,3%
G_B/G_T	68,4%	68,2%	67,8%	67,4%	66,7%

Tableau 2.24 – **Contributions des inégalités de croissance ajustée intra- et intergroupes pondérées aux inégalités totales entre 1998-2008.**

	r	G5	G2	G6	G7	G8	G4	G1	G3	Total
G_T^{API}	2	0,7335	0,7418	0,8164	0,8535	**1,2583**	0,8631	0,9243	**0,9965**	1,0074
	3	1,1002	1,1128	1,2245	1,2803	**1,8875**	1,2947	1,3865	**1,4947**	1,5112
	4	1,4669	1,4837	1,6327	1,7071	**2,5166**	1,7263	1,8487	**1,9929**	2,0149

Tableau 2.25 – **Inégalités de croissance ajustée sur la sous-période 1991-1997 avec (API).**

	r	G5	G7	G2	G4	G1	G6	G3	G8	Total
G_T^{MPI}	2	0,5613	1,1516	1,1163	1,4918	1,6410	1,5882	**1,9086**	**2,8237**	1,9317
	3	0,8806	2,2894	2,5736	4,0300	4,6416	**5,8721**	5,3884	**11,4514**	6,3472
	4	1,2984	4,3454	6,1562	12,2696	15,1637	**28,0000**	16,2780	**66,7418**	28,3860

Tableau 2.26 – **Inégalités de croissance ajustée sur la sous-période 1991-1997 avec (MPI).**

	r	G2	G5	G8	G6	G1	G4	G3	G7	Total
G_T^{API}	2	0,8475	1,0910	1,2217	1,0917	1,0274	1,0698	**1,0994**	**1,0780**	1,1150
	3	1,2712	1,6364	1,8326	1,6375	1,5411	1,6047	**1,6490**	**1,6171**	1,6725
	4	1,6949	2,1819	2,4435	2,1833	2,0548	2,1397	**2,1987**	**2,1561**	2,2300

Tableau 2.27 – **Inégalités de croissance ajustée sur la sous-période 1998-2008 avec (API).**

	r	G2	G1	G6	G5	G8	G3	G4	G7	Total
G_T^{MPI}	2	1,0556	2,2712	2,4141	2,5748	3,2009	3,1798	**3,6353**	**3,3376**	2,6785
	3	2,1480	7,1570	7,2125	10,4801	14,4548	16,8420	**20,8009**	**11,0174**	10,7432
	4	4,4404	25,7633	22,9090	51,0009	97,2675	**126,7288**	**158,3554**	36,5281	62,6845

Tableau 2.28 – **Inégalités de croissance ajustée sur la sous-période 1998-2008 avec (MPI).**

Groupes	G7	G6	G1	G5	G2	G8	G4	G3	Total
Effectifs	37	109	565	17	151	3369	58	130	4436
Moyenne des revenus en 1991 (£)	7 461,67	10 152,96	12 796,19	13 205,47	13 327,64	13 760,31	14 776,37	14 844,05	13 524,53
Part du groupe	1%	2%	13%	0%	3%	76%	1%	3%	100%
Moyenne des revenus en 2008 (£)	10 150,93	13 757,74	17 227,14	15 118,17	13 652,28	17 425,76	17 153,61	18 857,80	17 150,77
$G_{n_g}^{\text{API}}$	0,5409	0,5747	0,5403	0,8439	0,4333	0,6315	0,6709	0,6725	0,6178
$G_{n_g}^{\text{MPI}}$	0,9721	0,8813	0,8264	1,1221	0,4866	0,9329	0,8976	0,9676	0,9101

Tableau 2.29 – **Description de la situation financière des familles de Grande Bretagne entre 1991 et 2008.**

$r=1$		G2	G4	G5	G3	G8	G1	G6	G7
	G2	0,4333							
	G4	0,5659	0,6709						
	G5	0,7075	0,7829	0,8439					
G_B^{API}	G3	0,5863	0,6799	0,7720	0,6725				
	G8	0,5708	0,6630	0,7542	0,6535	0,6315			
	G1	0,5362	0,6291	0,7216	0,6143	0,5893	0,5403		
	G6	0,5650	0,6524	0,7361	0,6328	0,6078	0,5592	0,5747	
	G7	0,5564	0,6439	0,7288	0,6226	0,5957	0,5436	0,5611	0,5409

Tableau 2.30 – **Coefficients d'inégalité de croissance ajustée inter-groupes non-pondérés entre 1991-2008 (part. 1)**

$r=1$		G2	G4	G3	G8	G1	G5	G6	G7
	G2	0,4866							
	G4	0,7126	0,8976						
	G3	0,7777	0,9433	0,9676					
G_B^{API}	G8	0,7675	0,9301	0,9518	0,9329				
	G1	0,7238	0,8866	0,9040	0,8829	0,8264			
	G5	0,9069	1,0480	1,0618	1,0450	1,0024	1,1221		
	G6	0,7702	0,9242	0,9342	0,9121	0,8568	1,0260	0,8813	
	G7	0,8270	0,9770	0,9853	0,9629	0,9044	1,0785	0,9322	0,9721

Tableau 2.31 – **Coefficients d'inégalité de croissance ajustée inter-groupes non-pondérés entre 1991-2008 (part. 2)**

2.5.2 Tableaux et compléments liés à l'illustration [Chap. 2, Sect. 3.3]

A titre indicatif nous faisons figurer les montants des salaires minima mensuels moyens pratiqués au Royaume-Uni.

Années	1999	2000	2001	2002	2003
SMIC moyens mensuels (en £)	582,4	575,5	618,4	675,1	713,2

Années	2004	2005	2006	2007	2008
SMIC moyens mensuels (en £)	733,7	793,7	822,8	898,5	951,7

Tableau 2.32 – Salaires minima mensuels moyens au Royaume-Uni entre 1999 et 2008, Source : Eurostat.

La macro Excel utilise une codification qui lui est propre pour distinguer les différents groupes. Pour faciliter la retranscription des sorties nous reprenons les notations figurant sur les différentes sorties. Les correspondances entre les codifications que nous employons au cours de notre développement et celles employées par la macro commande sont présentées ci-après.

G1 = `S|C PT` : unités bénéficiaires comprenant au moins un membre travaillant à temps partiel ;
G2 = `1+Ftsempl` : travailleurs indépendants ;
G3 = `AlladFT` : personnes célibataires ou couples travaillant à temps plein ;
G4 = `C1FT1notw` : couples pour lesquels un membre travaille à temps plein et l'autre n'exerce aucune activité professionnelle rémunérée ;
G5 = `C1FT1PT` : couples pour lesquels un membre travaille à temps plein mais le second membre travaille à mi-temps ;
G6 = `Hd|Sp60+` : unités bénéficiaires dont un des membre (au moins) est âgé de 60 ans révolus ;
G7 = `HD|SpUne` : unités bénéficiaires sans emploi ;
G8 = `Other` : statut évolutif.

La conversion des tableaux au format LaTeX est réalisée à partir de la macro commande élaborée par Joachim Marder : Excel2Latex, disponible en libre accès sur internet. Les montants des revenus (et moyennes de revenus) sont exprimés en livres sterling (£).

Mouvements de transferts		G7	G6	G5	G1	G4	G8	G2	G3
	G7	0,2685							
	G6	0,3855	0,1410						
	G5	0,4896	0,1808	0,0290					
	G1	0,4792	0,2246	0,0681	0,1833				
	G4	0,4908	0,1938	0,0403	0,1616	0,0958			
	G8	0,5597	0,2513	0,0702	0,2043	0,1363	0,1770		
	G2	0,5766	0,2752	0,0903	0,2256	0,1577	0,1984	0,1905	
	G3	0,7305	0,3469	0,0973	0,2723	0,1899	0,2442	0,2307	0,0900

Tableau 2.33 – **Mouvements de transferts de revenus dans chacun des groupes : $\mathcal{T}(\mathrm{x}^g, \mathrm{y}^g)$**

Mouvements de croissance		G7	G6	G5	G1	G4	G8	G2	G3
	G7	0,2822							
	G6	0,5737	0,3751						
	G5	0,9301	0,6954	0,5180					
	G1	0,7326	0,5254	0,3754	0,5278				
	G4	0,7875	0,5669	0,4043	0,5670	0,4385			
	G8	0,7467	0,5326	0,3783	0,5389	0,4126	0,4051		
	G2	0,8520	0,6359	0,4818	0,6273	0,5123	0,4956	0,4902	
	G3	1,0238	0,7859	0,6097	0,7626	0,6416	0,6147	0,6087	0,3983

Tableau 2.34 – **Mouvements de croissance de revenus dans chacun des groupes $\mathcal{G}(\mathrm{x}^g, \mathrm{y}^g)$**

	Période finale								
	46,65%	G7	G6	G5	G1	G4	G8	G2	G3
Période initiale	G7	-	0,0578%	0,0337%	0,0102%	0,0186%	0,8045%	0,0279%	0,1645%
	G6	-0,0287%	-	0,4793%	0,1220%	0,2411%	9,9558%	0,3704%	2,4173%
	G5	-0,0154%	0,0395%	-	0,0210%	0,0480%	1,8242%	0,0763%	0,5733%
	G1	-0,0047%	0,0537%	0,0576%	-	0,0280%	1,1360%	0,0434%	0,2935%
	G4	-0,0098%	0,0375%	0,0767%	0,0156%	-	1,3354%	0,0546%	0,4009%
	G8	-0,5249%	0,5752%	3,2484%	0,5774%	1,3826%	-	2,2173%	17,2706%
	G2	-0,0169%	0,0016%	0,0944%	0,0155%	0,0389%	1,4086%	-	0,5060%
	G3	-0,1124%	-0,6885%	0,2156%	-0,0202%	0,0327%	-0,4147%	0,0783%	-

Tableau 2.35 – **Contributions des mouvements intergroupes à la mesure globale des mouvements de revenus**

Les tableaux qui suivent concernent la décomposition du statut `Other` sur la période 1991-2008. Ce nouveau partitionnement a pour but de mettre en avant les relations entre le changement de statut économique et le changement de revenus.

Statut des familles en période initiale `S|C PT`										
Nom du groupe		Total	`HD|SpUne`	`C1FT1PT`	`AlladFT`	`C1FT1notw`	`SSF`	`1+Ftsemp`	`Hd|Sp60+`
Taille du groupe	n_k	**275**	11	15	65	15	22	17	130
Revenu du groupe période initiale	$T_{ik_{t=0}}$	3 103 888,46	81 527,48	149 508,89	650 713,94	156 479,07	231 218,64	194 626,78	1 639 813,66
Moyenne de revenu période initiale	$\mu_{k_{t=0}}$	11 286,87	7 411,59	9 967,26	10 010,98	10 431,94	10 509,94	11 448,63	12 613,95
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	$P_k = n_k/n$	100%	4%	5%	24%	5%	8%	6%	47%
Revenu du groupe période finale	$T_{ik_{t=1}}$	4 063 906,12	109 302,22	210 650,62	1 317 644,78	212 334,70	217 162,36	305 064,67	1 691 746,78
Moyenne de revenu période finale	$\mu_{k_{t=1}}$	14 777,84	9 936,57	14 043,37	20 271,46	14 155,65	9 871,02	17 944,98	13 013,44
Mesure de Mouvement		**0,3091**	**0,3904**	**0,3739**	**0,7776**	**0,3401**	**0,0038**	**0,5428**	**0,0780**
Contribution F&O		**100%**	5,05%	6,60%	59,46%	6,00%	0,10%	10,85%	11,93%
Contribution intra		**21,26%**	0,20%	0,36%	14,05%	0,33%	0,01%	0,67%	5,64%
Contribution inter		**78,74%**							

Tableau 2.36 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est** `S|C PT`

Statut des familles en période initiale `1+Ftsemp`									
Nom du groupe		Total	`SSF`	`AlladFT`	`S|C PT`	`HD|SpUne`	`C1FT1PT`	`C1FT1notw`	`Hd|Sp60+`
Taille du groupe	n_k	**445**	35	163	44	13	40	40	110
Revenu du groupe période initiale	$T_{ik_{t=0}}$	5 906 449,40	369 426,76	2 028 293,18	573 083,69	176 688,81	556 729,24	576 405,70	1 625 822,02
Moyenne de revenu période initiale	$\mu_{k_{t=0}}$	13 272,92	10 555,05	12 443,52	13 024,63	13 591,45	13 918,23	14 410,14	14 780,20
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	$P_k = n_k/n$	100%	8%	37%	10%	3%	9%	9%	25%
Revenu du groupe période finale	$T_{ik_{t=1}}$	7 395 283,44	454 191,44	3 272 125,68	729 572,94	143 244,48	661 528,73	722 446,02	1 412 174,15
Moyenne de revenu période finale	$\mu_{k_{t=1}}$	16 618,61	12 976,90	20 074,39	16 581,20	11 018,81	16 538,22	18 061,15	12 837,95
Mesure de Mouvement		**0,2460**	**0,2857**	**0,5548**	**0,2278**	**-0,1970**	**0,2033**	**0,1982**	**-0,1318**
Contribution F&O		**100%**	9,13%	82,62%	9,16%	-2,34%	7,43%	7,24%	-13,24%
Contribution intra		**29,86%**	0,72%	30,26%	0,91%	-0,07%	0,67%	0,65%	-3,27%
Contribution inter		**70,14%**							

Tableau 2.37 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est** `1+Ftsemp`

Statut des familles en période initiale AlladFT									
Nom du groupe		Total	HD|SpUne	SSF	C1FT1notw	S|C PT	1+Ftsemp	C1FT1PT	Hd|Sp60+
Taille du groupe	n_k	**809**	25	62	116	90	113	185	218
Revenu du groupe période initiale	$T_{ik_{t=0}}$	14 246 474,88	323 627,28	897 273,07	1 954 224,63	1 524 206,18	2 034 093,64	3 353 311,23	4 159 738,87
Moyenne de revenu période initiale	$\mu_{k_{t=0}}$	17 609,98	12 945,09	14 472,15	16 846,76	16 935,62	18 000,83	18 126,01	19 081,37
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	$P_k = n_k/n$	100%	3%	8%	14%	11%	14%	23%	27%
Revenu du groupe période finale	$T_{ik_{t=1}}$	14 492 926,63	368 561,36	890 809,67	2 117 760,40	1 591 890,99	2 342 519,33	3 555 528,33	3 625 856,56
Moyenne de revenu période finale	$\mu_{k_{t=1}}$	17 914,62	14 742,45	14 367,90	18 256,56	17 687,68	20 730,26	19 219,07	16 632,37
Mesure de Mouvement		**-0,0164**	**0,1225**	**-0,0782**	**0,0484**	**-0,0007**	**0,0576**	**0,0558**	**-0,1552**
Contribution F&O		**100%**	-23,12%	36,61%	-42,43%	0,49%	-49,12%	-77,99%	255,56%
Contribution intra		**40,23%**	-0,71%	2,81%	-6,08%	0,05%	-6,86%	-17,84%	68,87%
Contribution inter		**59,77%**							

Tableau 2.38 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est** AlladFT

Statut des familles en période initiale `C1FT1notw`									
Nom du groupe		Total	`HD|SpUne`	`AlladFT`	`SSF`	`1+Ftsemp`	`S|C PT`	`C1FT1PT`	`Hd|Sp60+`
Taille du groupe	n_k	**618**	18	156	53	65	62	86	178
Revenu du groupe période initiale	$T_{ik_{t=0}}$	7 988 940,53	163 359,25	1 804 088,82	626 139,42	768 082,93	797 529,67	1 132 167,76	2 697 572,68
Moyenne de revenu période initiale	$\mu_{k_{t=0}}$	12 927,09	9 075,51	11 564,67	11 813,95	11 816,66	12 863,38	13 164,74	15 154,90
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	$P_k = n_k/n$	100%	3%	25%	9%	11%	10%	14%	29%
Revenu du groupe période finale	$T_{ik_{t=1}}$	10 323 561,99	249 525,33	3 225 698,41	767 880,70	1 114 930,41	910 679,84	1 552 468,23	2 502 379,07
Moyenne de revenu période finale	$\mu_{k_{t=1}}$	16 704,79	13 862,52	20 677,55	14 488,32	17 152,78	14 688,38	18 051,96	14 058,31
Mesure de Mouvement		**0,2387**	**0,4383**	**0,5662**	**0,1566**	**0,3367**	**0,0970**	**0,3229**	**-0,0713**
Contribution F&O		**100%**	5,35%	59,89%	5,63%	14,84%	4,08%	18,83%	-8,61%
Contribution intra		**17,87%**	0,16%	15,12%	0,48%	1,56%	0,41%	2,62%	-2,48%
Contribution inter		**82,13%**							

Tableau 2.39 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est `C1FT1notw`**

Statut des familles en période initiale C1FT1PT									
Nom du groupe		Total	HD|SpUne	C1FT1notw	AlladFT	S|C PT	SSF	1+Ftsemp	Hd|Sp60+
Taille du groupe	n_k	**658**	22	71	241	80	58	52	134
Revenu du groupe période initiale	$T_{ik_{t=0}}$	9 109 031,15	249 491,71	898 425,85	3 117 603,84	1 041 732,34	772 772,97	763 355,00	2 265 649,44
Moyenne de revenu période initiale	$\mu_{k_{t=0}}$	13 843,51	11 340,53	12 653,89	12 936,12	13 021,65	13 323,67	14 679,90	16 907,83
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	$P_k = n_k/n$	100%	3%	11%	37%	12%	9%	8%	20%
Revenu du groupe période finale	$T_{ik_{t=1}}$	11 739 185,90	349 317,17	1 222 596,33	5 036 754,85	1 292 121,58	824 008,52	995 040,59	2 019 346,86
Moyenne de revenu période finale	$\mu_{k_{t=1}}$	17 840,71	15 878,05	17 219,67	20 899,40	16 151,52	14 207,04	19 135,40	15 069,75
Mesure de Mouvement		**0,2316**	**0,3223**	**0,2784**	**0,4635**	**0,2026**	**0,0919**	**0,2184**	**-0,1420**
Contribution F&O		**100%**	4,65%	12,97%	73,28%	10,63%	3,50%	7,45%	-12,49%
Contribution intra		**28,04%**	0,16%	1,40%	26,84%	1,29%	0,31%	0,59%	-2,54%
Contribution inter		**71,96%**							

Tableau 2.40 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est C1FT1PT**

Statut des familles en période initiale `Hd|Sp60+`					
Nom du groupe		Total	`SSF`	`AlladFT`	`S|C PT`
Taille du groupe	n_k	8	3	2	3
Revenu du groupe période initiale	$T_{ik_{t=0}}$	111 972,76	27 063,67	31 830,73	53 078,36
Moyenne de revenu période initiale	$\mu_{k_{t=0}}$	13 996,59	9 021,22	15 915,37	17 692,79
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	$P_k = n_k/n$	100%	38%	25%	38%
Revenu du groupe période finale	$T_{ik_{t=1}}$	118 448,80	39 020,07	38 026,87	41 401,86
Moyenne de revenu période finale	$\mu_{k_{t=1}}$	14 806,10	13 006,69	19 013,44	13 800,62
Mesure de Mouvement		**0,0930**	**0,3590**	**0,1654**	**-0,2214**
Contribution F&O		100,00%	144,83%	44,48%	-89,31%
Contribution intra		31,94%	54,31%	11,12%	-33,49%
Contribution inter		68,06%			

Tableau 2.41 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est** `Hd|SP60+`

Statut des familles en période initiale HD|SpUne									
Nom du groupe		Total	S|C PT	SSF	AlladFT	C1FT1notw	Hd|Sp60+	1+Ftsemp	C1FT1PT
Taille du groupe	n_k	**220**	15	39	57	27	37	18	27
Revenu du groupe période initiale	$T_{ik_{t=0}}$	1 967 658,16	108 526,90	283 543,12	437 135,10	221 467,34	332 422,02	233 731,47	350 832,22
Moyenne de revenu période initiale	$\mu_{k_{t=0}}$	8 943,90	7 235,13	7 270,34	7 669,04	8 202,49	8 984,38	12 985,08	12 993,79
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	$P_k = n_k/n$	100%	7%	18%	26%	12%	17%	8%	12%
Revenu du groupe période finale	$T_{ik_{t=1}}$	3 113 440,89	176 197,07	428 718,04	993 114,21	340 791,57	399 259,56	381 100,04	394 260,42
Moyenne de revenu période finale	$\mu_{k_{t=1}}$	14 152,00	11 746,47	10 992,77	17 423,06	12 621,91	10 790,80	21 172,22	14 602,24
Mesure de Mouvement		**0,5003**	**0,4772**	**0,4718**	**0,8575**	**0,4953**	**0,2329**	**0,4563**	**0,2012**
Contribution F&O		**100%**	6,50%	16,72%	44,41%	12,15%	7,83%	7,46%	4,93%
Contribution intra		**18,94%**	0,44%	2,96%	11,51%	1,49%	1,32%	0,61%	0,61%
Contribution inter		**81,06%**							

Tableau 2.42 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est** HD|SpUne

Statut des familles en période initiale `Other`									
Groupe	Total	`HD|SpUne`	`SSF`	`S|C PT`	`AlladFT`	`1+Ftsemp`	`C1FT1notw`	`C1FT1PT`	`Hd|Sp60+`
n_k	**267**	17	39	20	77	9	13	29	63
$T_{ik_{t=0}}$	2 248 678,99	111 056,28	281 597,75	148 054,09	620 920,64	72 915,18	114 350,48	263 979,39	635 805,18
$\mu_{k_{t=0}}$	8 422,02	6 532,72	7 220,46	7 402,70	8 063,90	8 101,69	8 796,19	9 102,74	10 092,15
$P_k = n_k/n$ Pop. totale	100%	6%	15%	7%	29%	3%	5%	11%	24%
$T_{ik_{t=1}}$	3 986 390,01	182 309,10	397 045,72	222 190,95	1 459 878,39	174 201,84	165 284,79	553 231,83	832 247,39
$\mu_{k_{t=1}}$	14 930,30	10 724,06	10 180,66	11 109,55	18 959,46	19 355,76	12 714,21	19 076,96	13 210,28
Mesure de Mouvement	**0,5852**	0,5418	0,3895	0,4145	0,8602	0,9346	0,3842	0,8085	0,3250
Contribution F&O	**100%**	5,89%	9,72%	5,30%	42,39%	5,38%	3,20%	15,00%	13,10%
Contribution intra	**19,48%**	0,41%	2,13%	0,56%	8,32%	0,11%	0,24%	1,18%	5,57%
Contribution inter	**80,52%**								

Tableau 2.43 – **Récapitulatif des mouvements et statistiques de bases observés pour les familles dont le statut en 1991 est** `Other`

Période : 1991-1992									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G4	G8	G5	G2	G3
Taille du groupe	**4167**	96	316	150	428	**1311**	518	384	964
Moyenne de revenu période initiale	13 520,74	7 158,07	10 442,31	11 411,03	12 362,59	12 765,95	13 497,54	13 504,92	17 051,20
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	2%	8%	4%	10%	31%	12%	9%	23%
Moyenne de revenu période finale	13 766,97	6 348,75	10 532,80	11 188,83	12 835,24	12 698,79	13 990,57	13 436,05	17 845,06
Mesure de Mouvement	**0,0101**	-0,1682	0,0084	-0,0071	0,0426	-0,0274	0,0458	0,0150	0,0466
Contribution F&O	**100%**	-38,30%	6,32%	-2,52%	43,24%	-85,19%	56,33%	13,63%	106,49%
Contribution intra	**10,04%**	-0,88%	0,48%	-0,09%	4,44%	-26,80%	7,00%	1,26%	24,64%
Contribution inter	**89,96%**								

Tableau 2.44 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1991-1992**

Période 1992-1993									
Nom du groupe	Total	G7	G1	G6	G8	G4	G2	G5	G3
Taille du groupe	**3952**	123	175	333	**1211**	353	378	490	889
Moyenne de revenu période initiale	13 674,79	6 774,85	10 947,09	10 995,31	12 885,75	13 348,82	13 458,43	13 893,49	17 345,81
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	3%	4%	8%	31%	9%	10%	12%	22%
Moyenne de revenu période finale	13 949,03	6 233,98	10 998,71	11 472,68	13 102,99	13 367,02	13 437,02	14 205,49	17 984,73
Mesure de Mouvement	**0,0164**	-0,0554	0,0258	0,0347	0,0040	-0,0016	0,0175	0,0277	0,0349
Contribution F&O	**100%**	-10,52%	6,97%	17,85%	7,55%	-0,85%	10,19%	20,98%	47,84%
Contribution intra	**18,06%**	-0,33%	0,31%	1,50%	2,31%	-0,08%	0,97%	2,60%	10,76%
Contribution inter	**81,94%**								

Tableau 2.45 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1992-1993**

Période 1993-1994									
Nom du groupe	Total	G7	G1	G6	G8	G2	G5	G4	G3
Taille du groupe	**3959**	119	169	382	**1218**	372	474	359	866
Moyenne de revenu période initiale	13 774,87	6 904,37	11 546,68	11 649,88	12 368,84	13 777,03	14 146,67	14 425,01	17 594,73
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	3%	4%	10%	31%	9%	12%	9%	22%
Moyenne de revenu période finale	13 759,31	6 794,42	11 478,86	11 066,87	12 106,06	14 062,50	14 370,64	13 618,20	18 267,98
Mesure de Mouvement	**0,0002**	-0,0175	-0,0216	-0,0522	-0,0121	0,0297	0,0139	-0,0409	0,0442

Tableau 2.46 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1993-1994**

N.B : Sur ces deux vagues, les contributions des composantes atteignent des valeurs très importantes, difficilement interprétables. La composante intragroupe est supérieure à l'indicateur de mouvement global ($D_W = 0,000551146$) et la composante intergroupe est négative ($D_B = -0,000352181$). Ces valeurs traduisent une croissance rapide au sein des groupes contrebalancée par une décroissance d'ampleur presque équivalente, sur ce court intervalle de temps.

Période 1994-1995									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G2	G4	G5	G3
Taille du groupe	**3910**	119	429	156	**1199**	365	338	428	876
Moyenne de revenu période initiale	13 702,68	7 178,10	11 187,14	11 415,32	12 830,56	13 223,57	13 444,23	14 075,18	17 539,33
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	3%	11%	4%	31%	9%	9%	11%	22%
Moyenne de revenu période finale	13 841,05	7 709,90	11 382,31	11 665,79	12 624,76	13 940,62	13 043,95	14 226,32	18 008,01
Mesure de Mouvement	**0,0113**	0,0501	0,0132	0,0270	-0,0148	0,0650	-0,0308	0,0121	0,0314
Contribution F&O	**100%**	13,53%	12,83%	9,57%	-40,29%	53,85%	-23,62%	11,76%	62,37%
Contribution intra	**8,09%**	0,41%	1,41%	0,38%	-12,36%	5,03%	-2,04%	1,29%	13,97%
Contribution inter	**91,91%**								

Tableau 2.47 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1994-1995**

Période 1995-1996									
Nom du groupe	Total	G7	G1	G6	G8	G4	G5	G2	G3
Taille du groupe	**3996**	98	168	464	**1166**	357	417	397	929
Moyenne de revenu période initiale	14 139,29	7 646,74	11 791,25	11 877,95	12 881,02	14 159,74	14 384,48	14 668,48	17 613,47
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	2%	4%	12%	29%	9%	10%	10%	23%
Moyenne de revenu période finale	14 436,23	7 805,78	11 993,20	11 786,37	12 946,40	14 040,46	15 161,02	14 678,13	18 494,24
Mesure de Mouvement	**0,0258**	0,0454	0,0403	-0,0019	0,0144	-0,0179	0,0490	0,0212	0,0575
Contribution F&O	**100%**	4,32%	6,57%	-0,87%	16,35%	-6,22%	19,84%	8,18%	51,83%
Contribution intra	**19,43%**	0,11%	0,28%	-0,10%	4,77%	-0,56%	2,07%	0,81%	12,05%
Contribution inter	**80,57%**								

Tableau 2.48 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1995-1996**

Période 1996-1997									
Nom du groupe	Total	G7	G1	G6	G8	G4	G5	G2	G3
Taille du groupe	**4054**	71	161	499	**1195**	367	423	383	955
Moyenne de revenu période initiale	14 351,14	7 366,31	11 879,58	11 994,78	12 931,19	14 201,83	14 767,71	14 980,20	17 915,69
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	2%	4%	12%	29%	9%	10%	9%	24%
Moyenne de revenu période finale	14 660,96	7 184,02	11 793,88	11 858,25	13 058,86	14 470,25	15 204,93	15 401,64	18 704,65
Mesure de Mouvement	**0,0270**	-0,0260	0,0042	0,0069	0,0193	0,0342	0,0348	0,0258	0,0491
Contribution F&O	**100%**	-1,68%	0,61%	3,14%	21,11%	11,45%	13,46%	9,04%	42,86%
Contribution intra	**20%**	-0,03%	0,02%	0,39%	6,22%	1,04%	1,40%	0,85%	10,10%
Contribution inter	**80%**								

Tableau 2.49 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1996-1997**

Période 1997-1998									
Nom du groupe	Total	G7	G1	G6	G8	G5	G4	G2	G3
Taille du groupe	**4053**	42	159	556	1161	417	395	362	961
Moyenne de revenu période initiale	14 662,70	7 756,84	11 807,59	11 926,59	13 477,30	14 318,88	14 563,72	16 125,77	18 090,78
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	4%	14%	29%	10%	10%	9%	24%
Moyenne de revenu période finale	14 580,67	7 717,41	11 574,16	11 691,41	13 185,99	14 321,22	14 168,44	16 383,71	18 337,44
Mesure de Mouvement	**-0,0085**	-0,0064	-0,0164	-0,0255	-0,0324	0,0064	-0,0146	0,0279	0,0138
Contribution F&O	**100,00%**	0,77%	7,58%	41,14%	109,21%	-7,75%	16,72%	-29,34%	-38,34%
Contribution intra	**26,35%**	0,01%	0,30%	5,64%	31,28%	-0,80%	1,63%	-2,62%	-9,09%
Contribution inter	**73,65%**								

Tableau 2.50 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1997-1998**

Période 1998-1999									
Nom du groupe	Total	G7	G1	G6	G8	G5	G4	G2	G3
Taille du groupe	**4008**	33	192	607	**1173**	358	363	339	943
Moyenne de revenu période initiale	14 602,65	7 151,82	11 362,39	11 909,03	13 591,46	14 340,04	15 052,07	16 088,20	17 907,48
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	5%	15%	29%	9%	9%	8%	24%
Moyenne de revenu période finale	15 079,03	7 643,23	11 903,15	12 163,45	13 749,83	15 114,93	15 254,51	16 247,88	19 014,62
Mesure de Mouvement	**0,0365**	0,0523	0,0677	0,0315	0,0155	0,0607	0,0298	0,0043	0,0641
Contribution F&O	**100,00%**	1,18%	8,88%	13,04%	12,41%	14,84%	7,38%	1,00%	41,28%
Contribution intra	**17,83%**	0,01%	0,43%	1,98%	3,63%	1,33%	0,67%	0,08%	9,71%
Contribution inter	**82,17%**								

Tableau 2.51 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1998-1999**

Période 1999-2000									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G4	G5	G2	G3
Taille du groupe	3978	29	646	192	1098	368	370	310	965
Moyenne de revenu période initiale	14 978,88	8 390,06	12 191,56	13 215,50	13 843,53	15 149,91	15 203,52	16 115,89	18 168,89
période initiale									
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	16%	5%	28%	9%	9%	8%	24%
Moyenne de revenu période finale	15 709,45	9 249,41	12 375,59	13 607,68	14 345,70	15 595,03	16 478,29	16 948,15	19 456,20
Mesure de Mouvement	**0,0522**	0,0763	0,0104	0,0476	0,0547	0,0260	0,0908	0,0396	0,0766
Contribution F&O	**100,00%**	1,07%	3,23%	4,40%	28,96%	4,62%	16,18%	5,92%	35,62%
Contribution intra	**19,77%**	0,01%	0,52%	0,21%	7,99%	0,43%	1,51%	0,46%	8,64%
Contribution inter	**80,23%**								

Tableau 2.52 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 1999-2000**

Période 2000-2001									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G4	G5	G2	G3
Taille du groupe	3971	24	691	180	1092	333	402	287	962
Moyenne de revenu période initiale	15 618,37	9 131,41	12 798,94	13 171,74	14 476,39	15 824,40	16 294,56	17 068,51	18 772,96
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	17%	5%	27%	8%	10%	7%	24%
Moyenne de revenu période finale	16 006,23	9 420,32	12 655,33	13 210,45	14 667,19	16 513,51	16 395,06	17 692,48	19 779,42
Mesure de Mouvement	**0,0306**	0,0422	0,0004	0,0178	0,0249	0,0500	0,0074	0,0466	0,0589
Contribution F&O	**100,00%**	0,84%	0,25%	2,64%	22,38%	13,72%	2,44%	11,02%	46,73%
Contribution intra	**19,83%**	0,01%	0,04%	0,12%	6,15%	1,15%	0,25%	0,80%	11,32%
Contribution inter	**80,17%**								

Tableau 2.53 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2000-2001**

Période 2001-2002									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G5	G2	G4	G3
Taille du groupe	**3960**	24	739	175	1110	413	265	309	925
Moyenne de revenu période initiale	16 022,93	10 606,27	12 640,53	13 226,49	15 134,88	16 409,74	17 074,46	17 161,33	19 606,22
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	19%	4%	28%	10%	7%	8%	23%
Moyenne de revenu période finale	16 722,88	8 437,42	12 918,54	13 416,13	15 817,63	17 224,07	17 586,30	17 935,98	20 812,75
Mesure de Mouvement	**0,0423**	-0,1844	0,0249	0,0291	0,0525	0,0451	0,0118	0,0315	0,0636
Contribution F&O	**100,00%**	-2,64%	10,97%	3,04%	34,76%	11,11%	1,86%	5,80%	35,10%
Contribution intra	**21,84%**	-0,02%	2,05%	0,13%	9,74%	1,16%	0,12%	0,45%	8,20%
Contribution inter	**78,16%**								

Tableau 2.54 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2001-2002**

Période 2002-2003									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G5	G4	G2	G3
Taille du groupe	**3957**	27	792	174	1060	389	298	253	964
Moyenne de revenu période initiale	16 770,12	11 006,19	12 963,54	13 950,14	16 251,78	16 949,38	17 730,86	18 022,95	20 439,77
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	20%	4%	27%	10%	8%	6%	24%
Moyenne de revenu période finale	16 711,29	10 168,27	13 049,32	13 813,69	15 927,06	17 602,81	17 162,53	16 765,15	20 775,10
Mesure de Mouvement	**0,0021**	-0,0386	0,0228	-0,0013	-0,0194	0,0402	-0,0158	-0,0736	0,0206
Contribution F&O	**100,00%**	-12,43%	215,33%	-2,70%	-245,35%	186,75%	-56,20%	-222,05%	236,66%
Contribution intra	**34,75%**	-0,08%	43,10%	-0,12%	-65,73%	18,36%	-4,23%	-14,20%	57,65%
Contribution inter	**65,25%**								

Tableau 2.55 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2002-2003**

Période 2003-2004									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G2	G4	G5	G3
Taille du groupe	**3965**	28	838	189	1068	269	277	356	940
Moyenne de revenu période initiale	16 802,91	10 292,17	13 274,80	13 859,56	16 246,83	16 746,10	17 933,61	18 688,02	20 334,86
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	21%	5%	27%	7%	7%	9%	24%
Moyenne de revenu période finale	16 969,02	10 879,98	13 436,09	14 527,88	16 376,59	17 235,84	17 849,58	18 716,43	20 466,24
Mesure de Mouvement	**0,0089**	0,0344	0,0109	0,0654	0,0093	0,0146	-0,0109	-0,0043	0,0039
Contribution F&O	**100,00%**	2,72%	25,79%	34,89%	28,05%	11,09%	-8,52%	-4,28%	10,24%
Contribution intra	**16,89%**	0,02%	5,45%	1,66%	7,56%	0,75%	-0,59%	-0,38%	2,43%
Contribution inter	**83,11%**								

Tableau 2.56 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2003-2004**

Période 2004-2005									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G4	G2	G5	G3
Taille du groupe	**4010**	30	887	177	1089	249	290	347	941
Moyenne de revenu période initiale	16 840,60	10 833,23	13 701,42	15 572,13	16 283,84	16 913,78	17 058,20	18 399,76	20 212,69
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	22%	4%	27%	6%	7%	9%	23%
Moyenne de revenu période finale	17 188,30	10 486,31	13 753,02	16 028,80	16 455,52	16 627,56	17 081,03	18 673,93	21 339,86
Mesure de Mouvement	**0,0185**	-0,0623	0,0119	0,0375	0,0071	-0,0174	-0,0080	0,0082	0,0585
Contribution F&O	**100,00%**	-2,51%	14,22%	8,91%	10,43%	-5,81%	-3,13%	3,84%	74,05%
Contribution intra	**23,47%**	-0,02%	3,15%	0,39%	2,83%	-0,36%	-0,23%	0,33%	17,38%
Contribution inter	**76,52%**								

Tableau 2.57 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2004-2005**

Période 2005-2006									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G8	G4	G2	G5	G3
Taille du groupe	**4092**	33	947	180	1097	259	266	346	964
Moyenne de revenu période initiale	17 136,29	9 916,07	13 742,91	15 953,55	16 831,92	16 886,42	17 131,72	18 321,31	20 927,27
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100,00%	1%	23%	4%	27%	6%	7%	8%	24%
Moyenne de revenu période finale	17 211,40	10 124,08	14 350,74	16 546,41	16 231,65	16 486,32	16 804,22	18 712,59	21 271,65
Mesure de Mouvement	**0,0057**	-0,0252	0,0458	0,0408	-0,0396	-0,0296	-0,0150	0,0203	0,0225
Contribution F&O	**100,00%**	-3,56%	185,36%	31,43%	-185,98%	-32,75%	-17,08%	30,00%	92,58%
Contribution intra	**15,56%**	-0,03%	42,90%	1,38%	-49,86%	-2,07%	-1,11%	2,54%	21,81%
Contribution inter	**84,44%**								

Tableau 2.58 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2005-2006**

Période 2006-2007									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G1	G2	G8	G4	G5	G3
Taille du groupe	**4132**	42	1035	193	258	1069	252	325	958
Moyenne de revenu période initiale	17 206,64	10 496,42	14 385,38	16 051,45	16 678,58	16 711,71	16 919,77	18 680,59	21 051,50
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	25%	5%	6%	26%	6%	8%	23%
Moyenne de revenu période finale	17 036,99	9 350,28	14 086,81	16 098,81	17 821,25	15 839,56	17 056,30	18 853,53	21 253,94
Mesure de Mouvement	**-0,0105**	-0,0730	-0,0163	-0,0007	0,0609	-0,0556	-0,0016	0,0175	0,0159
Contribution F&O	**100,00%**	7,09%	39,06%	0,30%	-36,37%	137,46%	0,95%	-13,19%	-35,30%
Contribution intra	**34,00%**	0,07%	9,78%	0,01%	-2,27%	35,56%	0,06%	-1,04%	-8,18%
Contribution inter	**66,00%**								

Tableau 2.59 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2006-2007**

Période 2007-2008									
Nom du groupe	Total	G7	G6	G8	G1	G4	G5	G2	G3
Taille du groupe	**4273**	45	1121	1072	202	238	345	274	976
Moyenne de revenu période initiale	16 914,10	10 058,72	14 200,45	15 980,87	16 022,11	16 949,44	18 014,44	18 923,51	20 594,93
$\frac{\text{Pop. groupe}}{\text{Pop. totale}}$	100%	1%	26%	25%	5%	6%	8%	6%	23%
Moyenne de revenu période finale	17 062,01	10 062,12	14 005,83	16 051,79	16 032,03	17 040,19	18 283,72	18 972,26	21 254,90
Mesure de Mouvement	**0,0127**	-0,0031	-0,0114	0,0094	0,0108	0,0213	0,0210	0,0122	0,0402
Contribution F&O	**100,00%**	-0,26%	-23,51%	18,59%	4,02%	9,34%	13,36%	6,14%	72,32%
Contribution intra	**17,19%**	0,00%	-6,17%	4,66%	0,19%	0,52%	1,08%	0,39%	16,52%
Contribution inter	**82,81%**								

Tableau 2.60 – **Décomposition des mouvements de revenus sur la période 2007-2008**

Chapitre 3

Fondements axiomatiques et applications des mesures faiblement décomposables

3.1 Introduction

De nombreux travaux de caractérisation axiomatique sont réalisés à partir des années 1970. Comme le précise Kolm (1976a), ces travaux permettent de légitimer la structure d'un indicateur d'inégalités.

« *[...] To really see what these measures imply, it is necessary to build an axiomatic of them, i.e., to find for each one a set of properties which are equivalent to its adoption. If these properties are small in number and as intuitive as possible, they will display the implicit assumptions made by this choice.* » [Kolm (1976a), p.426].

La structure d'une mesure d'inégalités est ainsi entièrement définie par des propriétés axiomatiques. Plus ces propriétés sont faibles, plus large est la classe de mesures qui en découle. Deux approches peuvent alors être envisagées. On distingue généralement l'approche *ordinale*, de l'approche *cardinale*. Toutes deux conduisent néanmoins à un même résultat. L'approche ordinale consiste à supposer « qu'il existe une relation de préférence définie sur l'ensemble des distributions de revenus, qui reflète une opinion donnée sur la justice distributive » [Gajdos (2001), p. 3]. Cette relation de préférence est matérialisée par une relation binaire $\succeq_n$ qui permet d'ordonner la distribution de revenus selon un certain nombre de critères imposés. L'approche cardinale, que nous privilégions dans ce chapitre, se focalise directement sur la forme fonctionnelle de l'indice d'inégalités. Elle consiste à supposer qu'il existe une fonction d'évaluation, généralement notée $I(\cdot, n)$, permettant de capter « le degré d'injustice » ou de manière équivalente, le degré d'inégalités présent au sein d'une distribution de revenus.[1] Afin que l'évaluation des inégalités soit la plus représentative possible de la réalité économique, un certain nombre de critères doivent également être imposés sur cette forme fonctionnelle. Chacune de ces deux approches fournit une expression de la mesure d'inégalités qui répond parfaitement aux différentes propriétés invoquées. Toute la difficulté réside, une nouvelle fois, dans le choix de ces propriétés.

Au cours de ce dernier chapitre, nous cherchons à définir les fondements axiomatiques des mesures faiblement décomposables. Comme cela a pu être évoqué dans les Chapitres 1 et 2, deux propriétés distinctes sont proposées par Ebert (2010) pour décomposer, d'une part, les mesures absolues ou relatives (*via* l'axiome (DEC)), et d'autre part, les mesures dites « compromis » (*via* l'axiome ($\hat{DEC}$)) dont la structure dépend (explicitement) de l'indicateur de moyenne.

1. Un résultat équivalent peut néanmoins être obtenu avec une approche ordinale. En effet, lorsque le préordre $\succeq_n$ est complet et continu, il est équivalent à une fonction d'évaluation sociale, conformément au théorème de Debreu (1959).

Cette double axiomatisation laisse à penser que l'ensemble des mesures faiblement décomposables ne peut pas être analysé selon un même procédé de décomposition. La formulation de l'axiome $(D\hat{E}C)$ soulève, de plus, un certain nombre d'interrogations quant à la justification du facteur de pondération imposé par Ebert (2010). Dans le but de simplifier le travail de caractérisation axiomatique, nous montrons qu'il est possible d'unifier l'ensemble des mesures faiblement décomposables autour d'une seule et même propriété de décomposition en sous-groupes. En nous appuyant sur les travaux de Shorrocks (1980, 1984), nous définissons une nouvelle fonction de pondération qui tient compte à la fois du vecteur des tailles des différents sous-groupes et du vecteur des moyennes de ces mêmes sous-groupes. La principale différence avec l'axiome de décomposition additive (DA) de Shorrocks réside dans le fait que ces fonctions de pondération s'appliquent aussi bien aux indices d'inégalités intragroupes qu'aux indices d'inégalités intergroupes. La caractérisation de ces nouvelles fonctions de pondération nous permet de formuler une seule et même propriété de décomposition (DEC1), compatible avec l'ensemble des conditions d'invariance référencées dans la littérature [voir Lasso de la Vega *et al.* (2013)].

Les conditions d'invariance décrivent le comportement d'une mesure d'inégalités à la suite d'une modification de la distribution de revenus. Les transformations les plus courantes consistent à ajouter un même montant de revenus à chacun des individus d'une distribution ou à les faire bénéficier d'une augmentation proportionnelle de leur revenu dans le but de déterminer les conséquences de telles opérations sur le niveau d'inégalités. Lorsque la mesure d'inégalités reste inchangée à la suite de la première transformation mentionnée, la mesure est dite invariante par translation. Si au contraire la mesure d'inégalités reste insensible à une augmentation proportionnelle des revenus individuels, elle est invariante d'échelle. De nombreuses règles d'invariance sont ainsi référencées. Ces propriétés cardinales sont attrayantes sur le plan mathématique et sont généralement invoquées pour compléter la structure d'une mesure d'inégalités. L'invariance d'échelle (SI) ou l'invariance par translation (INV) donnent par exemple la possibilité d'obtenir des formes fonctionnelles simples et pertinentes pour évaluer les disparités au sein d'une distribution. Leur appréciation est cependant soumise à certaines critiques. Un argument avancé par Kolm (1976a, b) porte sur les jugements de valeur qu'expriment implicitement chacune des règles d'invariance. Kolm (1976a, b) établit, en effet, un parallèle entre les opinions politiques de droite ou de gauche et les règles d'invariance d'échelle ou d'invariance par translation.

Partant de ce constat, il peut alors sembler restrictif de limiter l'appréciation des inégalités au sein d'une population à une seule opinion politique, exprimée au travers d'une seule règle d'invariance. C'est en partie pour pallier ce problème que Zheng (2007a, b, c) introduit une nouvelle propriété de cohérence en unités ("*unit consistency*"). Il s'agit, plus exactement, d'une propriété spécifique qui établit que, le classement des inégalités reste inchangé à la suite d'une transformation subie par la distribution de revenus. En mettant ainsi l'accent sur le caractère ordinal des inégalités, cette propriété permet de capter l'ensemble des points de vue politiques qui s'expriment au sein d'une société. Nous choisissons, donc, de faire appel à l'axiome d'*unit consistency*" (UC) afin de compléter la structure de nos mesures faiblement décomposables caractérisées à l'aide de (DEC1). En combinant (UC) et (DEC1) à d'autres propriétés axiomatiques de base, nous définissons une famille de mesures à deux paramètres que nous qualifions de $(\alpha, \delta)-$Gini. Il s'agit d'une généralisation des mesures $\alpha-$Gini introduites au Chapitre 1 qui tient désormais compte de l'ensemble des jugements de valeur présents au sein d'une société.

Ce dernier chapitre insiste tout particulièrement sur les aspects techniques qui composent les étapes importantes de la construction des mesures d'inégalités. Pour présenter nos résultats, nous procédons en deux temps. Nous commençons par introduire notre reformulation de l'axiome de décomposition en sous-groupes (DEC1) afin de caractériser la structure générale des mesures faiblement décomposables dans une Section 3.2. Puis dans une Section 3.3, nous précisons l'expression de notre famille de mesures $\{G_{\alpha,\delta}(\cdot,n)\}_{n\geqslant 2}$ *unit-consistent* et faiblement décomposable en sous-groupes.

3.2 La décomposition faible reconsidérée

La propriété de décomposition en sous-groupes concède des atouts intéressants à un indicateur statistique, qu'il soit question d'évaluer les inégalités, la mobilité ou encore la pauvreté. Une telle propriété se révèle tout particulièrement utile à l'analyse empirique. Lorsque la population autorise un partitionnement selon un nombre fini de sous-groupes d'individus réunis autour d'une caractéristique commune, la propriété de décomposition permet de distinguer les disparités qui existent entre des individus appartenant à un même sous-groupe (et donc partageant cette même caractéristique), des disparités présentes entre les différents sous-groupes formés (opposant des individus qui *a priori* ne partagent pas cette même caractéristique).

Comme cela est mentionné dans le Chapitre 1, différentes adaptations de la propriété de décomposition en sous-groupes ont été proposées depuis les années 60. Chacune d'elles vise à décomposer des indices bien spécifiques. Dans cette section nous nous concentrons sur les fondements axiomatiques du concept de décomposition faible, récemment introduit par Ebert (2010). Nous généralisons la formulation de l'axiome de décomposition faible afin de caractériser une large classe de mesures qui contient aussi bien la variance des logarithmes que le coefficient de variation élevé au carré ou la différence moyenne de Gini (parmi d'autres). Cette généralisation de l'axiome de décomposition faible (DEC1) constitue la pierre angulaire des développements présentés dans ce dernier chapitre. Nous effectuons certains parallèles avec les travaux antérieurs de Shorrocks (1980,1984) basés sur le critère de séparabilité additive.

3.2.1 Les limites des axiomes de décomposition préexistants

La méthode de décomposition additive en sous-groupes[2] est largement utilisée dans la littérature. Comme cela a déjà été mentionné dans les chapitres précédents, cette propriété résulte des travaux de Bourguignon (1979) et Shorrocks (1980, 1984). La formulation initiale de cette décomposition stipule que l'inégalité totale correspond à la somme d'une moyenne pondérée des inégalités intragroupes et intergroupes. Pour calculer la composante d'inégalité intergroupe Shorrocks (1980) avance l'idée que, tout se passe, comme si des transferts étaient appliqués à l'intérieur de chaque sous-groupe. L'application de ces transferts permet, alors, de lisser les distributions dans chacun des sous-groupes. Après transferts, le revenu de tous les individus d'un même sous-groupe est égal à la moyenne de revenu de ce sous-groupe. L'évaluation des inégalités entre les différents sous-groupes s'opère, donc, sur la base des moyennes de revenus de chaque sous-groupe. Rappelons que [Shorrocks (1980)] :

$$I(\mathbf{x},n)=I(\mathbf{x}^1,\ldots,\mathbf{x}^G,n)=\sum_{g=1}^{G}\omega_g^G(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{n})I(\mathbf{x}^g,n_g)+I(\mu_1\mathbf{1}_{n_1},\ldots,\mu_G\mathbf{1}_{n_G},n), \tag{DA}$$

2. Nous employons également le terme de sous-partition.

où $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_G)$ est le vecteur de moyennes des sous-groupes et $\boldsymbol{n} := (n_1, \ldots, n_G)$ le vecteur des tailles des différents sous-groupes.

Propriété intéressante sur le plan empirique, elle n'en reste pas moins une condition de séparabilité forte et contraignante pour la caractérisation de la structure d'une mesure d'inégalités, de pauvreté ou de mobilité.[3] Conscient des limites que comporte (DA), Shorrocks (1984) propose d'affaiblir la règle d'agrégation – sous-jacente à toute propriété de décomposition – afin que l'inégalité totale puisse être déterminée à partir d'informations concernant la taille, la moyenne ainsi que l'inégalité de chaque sous-groupe. La formulation faible de la décomposition (AF) ne comporte aucune hypothèse sur la forme fonctionnelle de l'agrégation [voir Shorrocks (1984) p. 1370]. Une mesure d'inégalités est dès lors considérée comme décomposable si elle s'écrit :

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A(I(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}), n(\mathbf{x}), I(\mathbf{y}), \mu(\mathbf{y}), n(\mathbf{y})) \; ; \tag{AF}$$

où $A(\cdot)$ est une fonction agrégat continue et strictement croissante.[4] $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ constituent les vecteurs des sous-groupes construits à partir de la distribution globale $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

L'utilisation de la moyenne, comme revenu représentatif de l'ensemble des individus d'un sous-groupe, rencontre néanmoins certaines critiques. Dagum (1997) souligne, notamment, le fait qu'une telle pratique tend à entraîner une perte d'information relative à la variance et à l'asymétrie au sein des distributions. Pour éviter l'emploi d'une composante intergroupe dont le calcul repose sur les moyennes de revenus des divers sous-groupes, Ebert (2010) revisite le concept d'agrégation faible. Il se base sur l'idée intuitive selon laquelle les inégalités naissent des comparaisons de revenus que les individus font entre eux.

3. Le caractère additif de la séparabilité présuppose une indépendance entre les différents composants auxquels elle s'applique.

4. Voir également la propriété d'agrégation définie par Bourguignon (1979).

Supposons que la mesure des inégalités au sein d'une population de taille n soit connue. Imaginons à présent qu'un individu supplémentaire soit incorporé à la population initiale. La propriété d'agrégation faible d'Ebert (2010) nous indique alors que la mesure totale des inégalités sur la population de taille $n+1$ correspond à une somme pondérée entre la mesure des inégalités sur la population de taille n et les inégalités résultant de l'ensemble des comparaisons interpersonnelles effectuées entre le $n+1^{\text{ième}}$ individu et les n individus de la population initiale :

$$I(\mathbf{x}, x_{n+1}) = \gamma(n+1) I(\mathbf{x}, n) + \delta(n+1) \sum_{i=1}^{n} I(x_i, x_{n+1}, 2). \tag{AGG}$$

Contrairement aux propriétés (AF) ou (DA) de Shorrocks, cette règle d'agrégation ne nécessite pas de connaître la moyenne de la distribution. Les inégalités sont directement calculées à partir des revenus individuels. Ebert démontre alors que toute mesure satisfaisant cette règle d'agrégation ainsi que les propriétés de symétrie et de normalisation, satisfait la propriété de décomposition faible en sous-groupes énoncée comme suit [voir démonstration détaillée dans Ebert (2010), Proposition 2 p.98] :

Axiome 3.2.1 – Décomposition faible –(DEC). *Soit une population de taille n subdivisée en deux sous-groupes tels que $n = (n_1 + n_2)$ avec $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$. Il existe des fonctions de pondération strictement positives $\alpha^1(\boldsymbol{n})$, $\alpha^2(\boldsymbol{n})$ et $\beta(\boldsymbol{n})$, telles que :*

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, n_1 + n_2) &= \alpha^1(\boldsymbol{n}) \cdot I(\mathbf{x}^1, n_1) + \alpha^2(\boldsymbol{n}) \cdot I(\mathbf{x}^2, n_2) \\ &+ \ \beta(\boldsymbol{n}) \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} I(x_i^1, x_j^2, 2), \end{aligned} \tag{DEC}$$

pour tout $\mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}_{++}^{n_1}$, $\mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}_{++}^{n_2}$, avec $\boldsymbol{n} := (n_1, n_2)$ et où x_i^1 (x_j^2) représente le revenu du $i^{\text{ème}}$ ($j^{\text{ème}}$) individu dans le sous-groupe 1 (2).

La décomposition faible se résume donc à deux composantes principales. Nous rappelons en effet que les deux premiers termes à droite du signe égal représentent la composante d'inégalité intragroupe pondérée. Elle se constitue de l'inégalité (pondérée) calculée à l'intérieur du sous-groupe 1 à laquelle s'ajoute l'inégalité (pondérée) calculée à l'intérieur du sous-groupe 2. Le troisième et dernier terme correspond à la composante d'inégalité intergroupe. L'indicateur d'inégalités est appliqué à chaque paire de revenus afin d'évaluer les écarts entre les individus appartenant à des sous-groupes différents. L'axiomatisation de ce nouveau concept offre, donc, une composante intergroupe dont le calcul s'appuie sur les comparaisons interpersonnelles de revenus. L'argument principal avancé par Ebert (2010) pour justifier une telle formulation est qu'elle permet d'identifier clairement les individus des différents sous-groupes entre lesquels des transferts de revenus (de type Pigou-Dalton) doivent être opérés. Dans le cas de la décomposition additive, une telle identification n'est pas possible compte tenu de la configuration de la composante intergroupe (uniquement basée sur les moyennes des divers sous-groupes [voir Ebert (2010), p. 97]). Par ailleurs, cette notion de décomposition faible tend à rejoindre l'idée déjà suggérée par Kolm (1999), de mesurer les inégalités en se basant sur les (in)égalités entre paires de revenus individuels. Kolm (1999) propose, en effet, de définir des mesures d'inégalités basées sur des comparaisons par paires de revenus, telles que :

$$I(\mathbf{x}, n) = \phi\left(\sum_{i<j} \varphi\left[f(x_i, x_j)\right]\right), \tag{Kolm}$$

où $f(x_i, x_j)$ est l'inégalité par paire entre le revenu x_i de l'individu i et le revenu x_j l'individu j. $\phi(\cdot)$ et $\varphi(\cdot)$ étant deux fonctions croissantes, telles que $\phi(0) = \varphi(0) = 0$ et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_{++}$ [voir Kolm (1999), p.55 pour plus de détails].

La propriété de décomposition faible (DEC) ne peut cependant pas être appliquée aux indicateurs dont la structure dépend de la moyenne de la population.

Cette formulation se révèle, en effet, inadaptée à tous les indicateurs tels que le coefficient de variation élevé au carré, ou l'indice de Gini, qui, pourtant, sont cohérents avec cette notion d'inégalité basée sur les comparaisons interpersonnelles. Les indicateurs tels que la variance des logarithmes (mesure relative) ou la différence moyenne de Gini (mesure absolue) peuvent, en revanche, être décomposés selon (DEC). Le champ d'application de cet axiome n'englobe pas l'ensemble des mesures relatives et absolues basées sur des comparaisons par paires. Pour décomposer les mesures relatives dont la structure fait appel à la moyenne de la population (également appelées mesures *compromis*[5]), Ebert (2010) introduit un second axiome ($D\hat{E}C$) dont la formulation ne peut être directement déduite de l'axiome d'agrégation faible. Cette seconde propriété fait appel à une formulation considérée comme *ad hoc* – les fonctions de pondération étant fixées – mais néanmoins très proche de celle de (DEC). Le schéma de décomposition suggéré pour les mesures relatives exprimées en fonction de la moyenne de la distribution globale est alors le suivant :

Axiome 3.2.2 – Décomposition faible –($D\hat{E}C$). *Pour chaque* $\boldsymbol{n} := (n_1, n_2)$, *où* $n_1 \geqslant 1$, $n_2 \geqslant 1$, *il existe des fonctions de pondération strictement positives* $\alpha^1(\boldsymbol{n})$, $\alpha^2(\boldsymbol{n})$ *et* $\beta(\boldsymbol{n})$ *telles que :*

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, n_1 + n_2) &= \alpha^1(\boldsymbol{n}) \cdot \frac{\mu(\mathbf{x}^1)^\varepsilon}{\mu(\mathbf{x})^\varepsilon} \cdot I(\mathbf{x}^1, n_1) + \alpha^2(\boldsymbol{n}) \cdot \frac{\mu(\mathbf{x}^2)^\varepsilon}{\mu(\mathbf{x})^\varepsilon} \cdot I(\mathbf{x}^2, n_2) \\ &+ \ \beta(\boldsymbol{n}) \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\mu(x_i^1, x_j^2)^\varepsilon}{\mu(\mathbf{x})^\varepsilon} \cdot I(x_i^1, x_j^2, 2) \ , \qquad (D\hat{E}C) \end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{x}^1 \in \mathbb{R}_{++}^{n_1}$, $\mathbf{x}^2 \in \mathbb{R}_{++}^{n_2}$ *et* $\varepsilon > 0$.

Les fonctions de pondération employées $\alpha^g(\cdot)$ avec $g \in \{1, 2\}$ et $\beta(\cdot)$ sont les mêmes que celles définies dans (DEC). Il est important de noter que ces

5. Cette notion de mesures *compromis* apparaît chez Blackorby et Donaldson (1980) ainsi que chez Ebert (1988b). Elle reflète l'idée que ces mesures peuvent représenter l'un ou l'autre des concepts (absolu ou relatif) selon la façon dont l'indicateur d'inégalités est défini.

fonctions dépendent uniquement du vecteur de tailles de populations $\boldsymbol{n}$. La formulation alternative de la décomposition proposée dans $(D\hat{E}C)$ fait également intervenir la part de revenu moyen de chaque sous-groupe dans le revenu moyen global (élevés à une puissance ε) comme facteur de pondération supplémentaire. Il est, en effet, nécessaire de tenir compte des indicateurs de moyenne des différents sous-groupes pour décomposer correctement les mesures relatives (compromis).

Cette double axiomatisation est nécessaire à la caractérisation de l'ensemble des mesures faiblement décomposables. L'emploi des propriétés d'invariance par réplication et de décomposition faible (DEC), conditionné[6] par le respect de la propriété de normalisation suffisent alors à définir la structure de base des mesures faiblement décomposables en sous-groupes au sens d'Ebert (2010) :

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} I(x_i, x_j, 2). \tag{Ebert}$$

Ce premier résultat offre une formulation simple et attrayante pour les mesures d'inégalités, néanmoins, elle ne concerne que les mesures satisfaisant (DEC), c'est-à-dire pour l'essentiel des mesures absolues. Un travail analogue doit ensuite être effectué avec $(D\hat{E}C)$ pour les mesures compromis. Dans ses travaux, Ebert (2010) met en avant des sous-familles de mesures faiblement décomposables. Il retient principalement trois familles d'indicateurs bien connus de la littérature – à savoir l'indice de Gini standard, la différence moyenne de Gini et la variance des logarithmes – qu'il généralise de manière à ce que chacune d'elles soient compatible avec un des axiomes de décomposition faible (DEC) ou $(D\hat{E}C)$. Le choix de ces indicateurs reste néanmoins arbitraire.

6. Comme le rappelle Ebert (2010) dans son Théorème 1 p.99, une condition nécessaire au respect de (DEC) et (PP) pour toute mesure d'inégalités $(I(\cdot, n))$ est que $I(\cdot, 2)$ respecte (NM). Un résultat analogue est obtenu lorsque la propriété d'agrégation faible (AGG) est employée à la place de (DEC).

Dans la suite de notre développement, nous nous intéressons aux fondements axiomatiques des fonctions de pondération invoquées dans chacune des deux axiomatisations de la décomposition faible et nous montrons qu'il n'est pas nécessaire de recourir à deux axiomes différents pour caractériser l'ensemble des mesures faiblement décomposables en sous-groupes. Nous définissons ainsi une nouvelle propriété (DEC1) qui inclut (DEC) et ($D\hat{E}C$), avec laquelle nous caractérisons une famille de mesures faiblement décomposables bien plus large que celle proposée par Ebert (2010).

3.2.2 Une caractérisation axiomatique avec (DEC1)

Notre objectif est de proposer une formulation unique et plus générale de la propriété de décomposition faible afin que l'ensemble des mesures aussi bien absolues que relatives ou compromis puissent être décomposées selon un même procédé et faciliter ainsi le travail de caractérisation. Pour obtenir un tel résultat nous nous concentrons sur les fonctions de pondération affectées aux composantes intra- et intergroupes. Nous caractérisons, en nous appuyant sur les travaux de Shorrocks (1980, 1984), des fonctions de pondération qui tiennent compte à la fois de la taille et de la moyenne de la population. La formulation de ces poids est donc plus générale que celle employée par Ebert (2010) qui n'intègre réellement que les tailles de populations. Nous montrons qu'en associant cette nouvelle formulation de la décomposition faible aux axiomes de continuité, normalisation, symétrie et d'invariance par réplication, il est possible de caractériser la classe de l'ensemble des mesures d'inégalités faiblement décomposables (aussi bien absolues que relatives).

Pour définir nos mesures, nous considérons une population de $n \in \mathbb{N}$ individus (avec $n \geqslant 1$ et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels). Le vecteur de revenus individuels se note $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)$ et où $\mathbb{R}_+^n$ est l'ensemble des nombres réels non négatifs de dimension n [resp. $\mathbb{R}_{++}^n$ est l'ensemble des réels strictement positifs de dimension n]. La distribution des revenus peut être répliquée un nombre k de fois, telle que $\mathbf{x}^{[k]} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{k \text{ fois}}) \in \mathbb{R}_+^{kn}$, pour $k \geqslant 2$. De plus, nous faisons l'hypothèse que la population de taille n peut être partitionnée en G sous-groupes exclusifs et exhaustifs de taille n_g avec $g \in \{1, \ldots, G\}$ et $G \geqslant 2$, de telle sorte que $n = (n_1 + \cdots + n_G)$. La distribution de revenus de chaque sous-groupe est notée $\mathbf{x}^g \in \mathbb{R}_+^{n_g}$, avec $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^G)$. Soit $\mu(\mathbf{x}) \equiv \mu$ la moyenne arithmétique des revenus, le vecteur des moyennes de revenus est $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_G)$. Par définition, la moyenne entre le revenu d'un individu i et celui d'un individu j tel que $x_i \neq x_j$ est donnée par $\mu(x_i, x_j) = \frac{1}{2}(x_i + x_j) =: \mu_{ij}$. Conformément aux travaux de Shorrocks (1980), $Y := n\mu$ désigne la masse de revenu dans la population globale, tandis que $Y_g := n_g \mu_g$ représente la masse totale de revenu dans le sous-groupe g, telles que $Y_g, Y \in \mathbb{R}_+$. Enfin, le vecteur de 1 de taille n est $\mathbf{1}_n$.

Par souci de précision, nous distinguons deux terminologies pour parler des indicateurs que nous cherchons à caractériser. Un *indice* d'inégalités est une fonction $I : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, pour une taille de population $n \geqslant 1$ donnée. Une *mesure* d'inégalités se définit comme une séquence d'indices d'inégalités, notée $\{I(\cdot, n)\}_{n \geqslant 1}$. Dans nos développements, la notation $I(\mathbf{x}, n)$ réfère à la fois à la *mesure* d'inégalités de la distribution $\mathbf{x}$ de taille n (pour tout $n \geqslant 1$) et à l' *indice* d'inégalités (lorsque la taille de la population est fixe). Nous pouvons, à présent, évoquer les propriétés axiomatiques nécessaires à notre travail de caractérisation. Nous considérons qu'un indice d'inégalités est défini et continu en tout point de son domaine de définition.

Axiome 3.2.3 – Continuité –(CN). *Pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $I(\mathbf{x}, n)$ *est continu* *sur* $\mathbb{R}_+^n$.

Un indice d'inégalités ne doit pas dépendre de la manière dont les individus sont labellisés au sein de la distribution de revenus. Tout indice d'inégalités satisfaisant cette propriété ne sera pas affecté par une permutation des individus dans la distribution de revenus ; en d'autres termes, l'indice d'inégalités est symétrique.

Axiome 3.2.4 – Symétrie –(SM). *Pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $I(\mathbf{x}, n)$ *est symétrique si :*

$$I(\mathbf{x}, n) = I(\mathbf{z}, n), \tag{SM}$$

où $\mathbf{z}$ *est obtenu à partir de* $\mathbf{x}$ *à la suite de permutations des arguments telles que :* $\mathbf{z} = \pi \mathbf{x}$ *;* π *étant la matrice de permutations* $n \times n$.

Cette propriété assure donc un jugement des inégalités impartial de la part d'un décideur politique. La valeur d'un indice d'inégalités est nulle si et seulement si tous les revenus de la distribution sont identiques. On dit que l'indice est normalisé. Dans tous les autres cas, la valeur de l'inégalité est (strictement) positive.

Axiome 3.2.5 – Normalisation –(NM). *Pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $n \geqslant 1$, $I(\mathbf{x}, n)$ *est nul si :*

$$I(\xi \mathbf{1}_n, n) = 0, \ \forall \xi \in \mathbb{R}_+ \ ; \tag{NM}$$

sinon,

$$I(\mathbf{x}, n) > 0.$$

Une mesure d'inégalités reste inchangée lorsque la population est répliquée un nombre k de fois, conformément au principe d'invariance par réplication de Dalton (1920), encore connu sous le nom de *principe de population* (PP). Cette propriété permet, notamment, de comparer différents indicateurs calculés sur des populations de tailles différentes.

Axiome 3.2.6 – Invariance par réplication –(PP). *Pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $I(\mathbf{x}, n)$ *est invariante par translation si :*

$$I(\mathbf{x}^{[k]}, kn) = I(\mathbf{x}, n), \;\; \forall k \geqslant 2. \tag{PP}$$

Pour compléter ces premières propriétés et proposer une caractérisation de l'ensemble des mesures faiblement décomposables, nous généralisons la formulation de la propriété de décomposition faible suggérée par Ebert (2010). Cette généralisation a, pour but, de simplifier l'application du concept de décomposition en sous-groupes. Des fonctions de pondération comparables à celles utilisées pour la décomposition additive [Shorrocks (1980, 1984)] sont introduites. Ces fonctions nous permettent de définir un seul et unique axiome de décomposition faible, compatible avec l'ensemble des mesures, qu'elles soient absolues comme relatives (exprimées en fonction de la moyenne de la population totale ou non). Ce nouvel axiome est noté (DEC1). [7]

Axiome 3.2.7 – Décomposition faible reconsidérée –(DEC1). *Étant donné une distribution* $\mathbf{x}$ *subdivisée en deux sous-groupes, telle que* $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \in \mathbb{R}^n_+$ *où* $n = (n_1 + n_2)$ *avec* $n_1 \geqslant 1$ *et* $n_2 \geqslant 1$*, une mesure d'inégalités est faiblement décomposable s'il existe des fonctions de pondération à valeur réelle non nulles* $\alpha(n_1, n, Y_1, Y)$*,* $\alpha(n_2, n, Y_2, Y)$ *et* $\beta(2, n, x^1_i + x^2_j, Y)$ *telles que :*

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, n_1 + n_2) &= \alpha(n_1, n, Y_1, Y) I(\mathbf{x}^1, n_1) + \alpha(n_2, n, Y_2, Y) I(\mathbf{x}^2, n_2) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \beta(2, n, x^1_i + x^2_j, Y) I(x^1_i, x^2_j, 2), \end{aligned} \tag{DEC1}$$

où $Y_1 := n_1 \cdot \mu_1$ *[resp.* $Y_2 := n_2 \cdot \mu_2$*] et* $Y := n \cdot \mu$.

En faisant appel aux axiomes de continuité, de symétrie et de normalisation nous caractérisons les fonctions de pondération $\alpha(n_1, n, Y_1, Y)$, $\alpha(n_2, n, Y_2, Y)$

7. Nous choisissons d'exposer l'énoncé de l'axiome (DEC1) en ne considérant que deux sous-groupes par souci de simplicité. La formulation de (DEC1) reste, néanmoins, généralisable à un nombre fini de sous-groupes comme nous le démontrons par la suite.

et $\beta(2, n, x_i^1 + x_j^2, Y)$ associées aux composantes intragroupes et intergroupes. La construction de ces fonctions est sensiblement la même que celle retenue par Shorrocks (1980) dans le cas de la décomposition additive. Nous montrons, en effet, que nos fonctions peuvent s'écrire comme le ratio de deux fonctions $\theta(\cdot, \cdot)$ qui dépendent à la fois de la taille ainsi que de la moyenne des différents sous-groupes.

Lemme 3.2.1 *Si une mesure d'inégalités satisfait* (CN), (NM), (SM) *et* (DEC1), *alors il existe un ensemble de fonctions non nulles et continues* $\alpha(\cdot, \cdot)$, $\beta(\cdot, \cdot)$ *et* $\theta(\cdot, \cdot)$ *telles que :*

$$\alpha(n_g, n, Y_g, Y) = \frac{\theta(n_g, \mu_g)}{\theta(n, \mu)} \quad et \quad \beta(2, n, x_i + x_j, Y) = \alpha(2, n, x_i + x_j, Y) \ , \quad (1)$$

avec $n_g \geqslant 2$.

Preuve.

Nous supposons que $I(\mathbf{x}, n)$ satisfait (CN), (NM), (SM), et (DEC1).

<u>Étape 0 :</u> La notation $\sum_{g<g'}$ représente la somme effectuée sur l'ensemble des sous-groupes g, g' constitués à partir de la population totale, pris sans remplacement. Comme cela a été exprimé précédemment (DEC1) peut se généraliser à un nombre fini G de sous-groupes :

Décomposition faible reconsidérée (DEC1'). *Étant donné une population subdivisée en G sous-groupes, telle que $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^G) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $n = (n_1 + \cdots + n_G)$, $n_g \geqslant 1$ et $g \in \{1, \ldots, G\}$ tel que $G \geqslant 2$, une mesure d'inégalités est faiblement décomposable, s'il existe des fonctions de pondération à valeur réelle non nulles $\alpha(n_g, n, Y_g, Y)$ et $\beta(2, n, x_i^g + x_j^{g'}, Y)$ avec $g, g' \in \{1, \ldots, G\}$*

telle que :

$$I(\mathbf{x}, n) = \sum_{g=1}^{G} \alpha(n_g, n, Y_g, Y) I(\mathbf{x}^g, n_g) + \sum_{g<g'}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n_{g'}} \beta(2, n, x_i^g + x_j^{g'}, Y) I(x_i^g, x_j^{g'}, 2). \tag{DEC1'}$$

Pour démontrer le Lemme 3.3.1, il nous faut prouver le résultat suivant.

Implication. [H^s] : (DEC1) $\Longrightarrow$ [(DEC1') pour tout $G \in \{2, \ldots, s\}$].

L'implication se prouve par récurrence. Pour l'initialisation nous considérons $s = 2$. Dans ce cas, l'implication (DEC1) $\Longrightarrow$ (DEC1') se démontre aisément. Lorsqu'une distribution est subdivisée en 2 sous-groupes $\mathbf{x} =: (\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2)$ et $n =: \tilde{n}_1 + \tilde{n}_2$, alors, d'après (DEC1) :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = I(\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{\mathbf{x}}^2, \tilde{n}_1 + \tilde{n}_2) &= \alpha(\tilde{n}_1, n, \tilde{Y}_1, Y) I(\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{n}_1) + \alpha(\tilde{n}_2, n, \tilde{Y}_2, Y) I(\tilde{\mathbf{x}}^2, \tilde{n}_2) \\ &+ \sum_{i=1}^{\tilde{n}_1} \sum_{j=1}^{\tilde{n}_2} \beta(2, n, \tilde{x}_i^1 + \tilde{x}_j^2, Y) I(\tilde{x}_i^1, \tilde{x}_j^2, 2). \end{aligned} \tag{A0}$$

Supposons que **[H^{s-1}]** est vraie. Définissons, alors, une sous-partition de $\mathbf{x}$ en $s-1$ sous-groupes, tels que $\mathbf{x} =: (\mathbf{x}^{1'}, \mathbf{x}^{2'}, \ldots, \mathbf{x}^{s'-1})$ et $n =: n_{1'} + \cdots + n_{s'-1}$ (avec $s' = s$). Alors (DEC1') donne :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = &\sum_{g'=1}^{s-1} \alpha(n_{g'}, n, Y_{g'}, Y) I(\mathbf{x}^{g'}, n_{g'}) \\ &+ \sum_{k'<h'}^{s-1} \sum_{i=1}^{n_{k'}} \sum_{j=1}^{n_{h'}} \beta(2, n, x_i^{k'} + x_j^{h'}, Y) I(x_i^{k'}, x_j^{h'}, 2). \end{aligned} \tag{A0'}$$

En posant $\tilde{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^{1'}$, nous calculons l'inégalité entre les distributions $\tilde{\mathbf{x}}^2$ et $\tilde{\mathbf{x}}^1$ puis en égalisant (A0) et (A0'), nous obtenons,

$$\begin{aligned} &\alpha(\tilde{n}_2, n, \tilde{Y}_2, Y) I(\tilde{\mathbf{x}}^2, \tilde{n}_2) + \sum_{i=1}^{\tilde{n}_1} \sum_{j=1}^{\tilde{n}_2} \beta(2, n, \tilde{x}_i^1 + \tilde{x}_j^2, Y) I(\tilde{x}_i^1, \tilde{x}_j^2, 2) \\ = &\sum_{g'=2}^{s-1} \alpha(n_{g'}, n, Y_{g'}, Y) I(\mathbf{x}^{g'}, n_{g'}) + \sum_{k'<h'}^{s-1} \sum_{i=1}^{n_{k'}} \sum_{j=1}^{n_{h'}} \beta(2, n, x_i^{k'} + x_j^{h'}, Y) I(x_i^{k'}, x_j^{h'}, 2). \end{aligned} \tag{$\star$}$$

Puisque $[\mathbf{H}^{s-1}]$ est supposé vrai, alors $[\mathbf{H}^{s''-1}]$ est vrai pour s'' donné tel que $s'' \in \{2, \ldots, s-1\}$. Si la population est partitionnée en $s-1$ sous-groupes, elle peut, toujours, être redécoupée en un nombre de sous-partitions inférieur à $s-1$. D'après $[\mathbf{H}^{s''-1}]$, l'expression (A0') peut se réécrire comme :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = & \sum_{g''=1}^{s''-1} \alpha(n_{g''}, n, Y_{g''}, Y) I(\mathbf{x}^{g''}, n_{g''}) \\ & + \sum_{k''<h''}^{s''-1} \sum_{i=1}^{n_{k''}} \sum_{j=1}^{n_{h''}} \beta(2, n, x_i^{k''} + x_j^{h''}, Y) I(x_i^{k''}, x_j^{h''}, 2). \end{aligned} \tag{A0''}$$

A présent, posons $s''-1 = 3$ tel que $\tilde{\mathbf{x}}^1 = \mathbf{x}^{1'} =: (\mathbf{x}^{1''}, \mathbf{x}^{2''})$ et $\tilde{\mathbf{x}}^2 =: \mathbf{x}^{3''}$. En égalisant (A0) et (A0''), l'inégalité au sein de la distribution $\tilde{\mathbf{x}}_1$ est telle que :

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{n}_1, n, \tilde{Y}_1, Y) I(\tilde{\mathbf{x}}^1, \tilde{n}_1) = & \sum_{g''=1}^{2} \alpha(n_{g''}, n, Y_{g''}, Y) I(\mathbf{x}^{g''}, n_{g''}) \\ & + \sum_{i=1}^{n_{1''}} \sum_{j=1}^{n_{2''}} \beta(2, n, x_i^{1''} + x_j^{2''}, Y) I(x_i^{1''}, x_j^{2''}, 2). \end{aligned} \tag{$\star\star$}$$

En introduisant une nouvelle fois ($\star\star$) et ($\star$) dans (A0), il s'ensuit :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = & \sum_{g''=1}^{2} \alpha(n_{g''}, n, Y_{g''}, Y) I(\mathbf{x}^{g''}, n_{g''}) \sum_{g'=2}^{s-1} \alpha(n_{g'}, n, Y_{g'}, Y) I(\mathbf{x}^{g'}, n_{g'}) \\ & + \sum_{i=1}^{n_{1''}} \sum_{j=1}^{n_{2''}} \beta(2, n, x_i^{1''} + x_j^{2''}, Y) I(x_i^{1''}, x_j^{2''}, 2) \\ & + \sum_{k'<h'}^{s-1} \sum_{i=1}^{n_{k'}} \sum_{j=1}^{n_{h'}} \beta(2, n, x_i^{k'} + x_j^{h'}, Y) I(x_i^{k'}, x_j^{h'}, 2). \end{aligned}$$

Soit de manière équivalente, en considérant $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{1''}, \mathbf{x}^{2''}, \mathbf{x}^{2'}, \mathbf{x}^{3'}, \ldots, \mathbf{x}^{s'-1}) =:$

$(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4, \ldots, \mathbf{x}^s)$:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = & \sum_{g=1}^{s} \alpha(n_g, n, Y_g, Y) I(\mathbf{x}^g, n_g) \\ & + \sum_{k<h}^{s} \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_h} \beta(2, n, x_i^k + x_j^h, Y) I(x_i^k, x_j^h, 2) \\ & = I(\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^s, n). \end{aligned}$$

Donc, sous l'hypothèse $[\mathbf{H}^{s-1}]$, (DEC1) implique (DEC1') pour une sous-partition en s sous-groupes, *c.-à-d.*, $[\mathbf{H}^s]$.

<u>ÉTAPE 1 :</u> Nous montrons que $\alpha(n_g, n, Y_g, Y) = \frac{\beta(2,n,x_i+x_j,Y)}{\beta(2,n_g,x_i+x_j,Y_g)}$.
Supposons une population de taille n subdivisée en 1 sous-groupe g contenant n_g individus et $n - n_g$ sous-groupes de taille 1. Rappelons que Y est la masse totale de revenus de la population globale et Y_g la masse totale de revenus du sous-groupe g telle que $Y_g, Y \in \mathbb{R}_+$. D'après (DEC1'), il vient :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = \alpha(n_g, n, Y_g, Y) I(\mathbf{x}^g, n_g) + \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{n-n_g} \beta(2, n, x_i + x_j, Y) I(x_i, x_j, 2) \\ + \sum_{j,j'}^{n-n_g} \beta(2, n, x_j + x_{j'}, Y) I(x_j, x_{j'}, 2). \end{aligned}$$

Notons que, chaque individu du sous-groupe g constitue 1 sous-groupe à lui seul, ainsi, en appliquant une nouvelle fois (DEC1') nous avons :

$$I(\mathbf{x}^g, n_g) = \sum_{i,j}^{n_g} \beta(2, n_g, x_i + x_j, Y_g) I(x_i, x_j, 2).$$

Soit :

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{x},n) &= \alpha(n_g,n,Y_g,Y)\sum_{i,j}^{n_g}\beta(2,n_g,x_i+x_j,Y_g)I(x_i,x_j,2)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n-n_g}\beta(2,n,x_i+x_j,Y)I(x_i,x_j,2)\\
&\quad+\sum_{j,j'}^{n-n_g}\beta(2,n,x_j+x_{j'},Y)I(x_j,x_{j'},2). \qquad \text{(A1)}
\end{aligned}
$$

A présent, considérons que chacun des individus de la population constituent 1 sous-groupe tel que $G = n = \sum_g n_g$ avec $n_g = 1$ pour tout $g \in \{1, 2, \ldots, G\}$. En invoquant (DEC1') et (NM) nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{x},n) &= \alpha(1,n,x_1,Y)I(x_1,1)+\cdots+\alpha(1,n,x_n,Y)I(x_n,1)\\
&\quad+\beta(2,n,x_1+x_2,Y)I(x_1,x_2,2)+\cdots+\beta(2,n,x_1+x_n,Y)I(x_1,x_n,2)\\
&\quad+\beta(2,n,x_2+x_3,Y)I(x_2,x_3,2)+\cdots+\beta(2,n,x_2+x_n,Y)I(x_2,x_n,2)\\
&\quad+\cdots+\beta(2,n,x_{n-1}+x_n,Y)I(x_{n-1},x_n,2)\\
&= \sum_{i,j}^{n}\beta(2,n,x_i+x_j,Y)I(x_i,x_j,2). \qquad \text{(A2)}
\end{aligned}
$$

En soustrayant (A2) et (A1), puis en réarrangeant les termes, il vient :

$$
\sum_{i,j}^{n_g}\left[\alpha(n_g,n,Y_g,Y)\beta(2,n_g,x_i+x_j,Y_g)-\beta(2,n,x_i+x_j,Y)\right]I(x_i,x_j,2)=0. \qquad \text{(A3)}
$$

Afin de déterminer l'unique solution de (A3), nous distinguons deux cas.

• <u>Cas 1 :</u> Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ une distribution de revenus non-négative telle que $\mathbf{x}^g = (x, \ldots, x; x', \ldots, x')$ avec $0 \leqslant x < x'$. En considérant que le sous-groupe g contient $k \geqslant 1$ individus de revenu x et $k' \geqslant 1$ individus de revenus x' il s'ensuit d'après (A3) :

$$k \cdot k' \left[\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, x + x', Y_g) - \beta(2, n, x + x', Y)\right] I(x, x', 2) = 0. \tag{$\star\star\star$}$$

En postulant que $\beta(2, \cdot, \cdot, \cdot)$ est une fonction non nulle et en rappelant que $I(x, x', 2) > 0$ puisque $x < x'$, nous avons :

$$\alpha(n_g, n, k \cdot x + k' \cdot x', Y)\beta(2, n_g, X, k \cdot x + k' \cdot x') = \beta(2, n, X, Y) \ ,$$

cette équation fonctionnelle tient pour tout Y, n, lorsque $X = x + x'$ et $n_g \geqslant 2$ et pour tout $k \cdot x + k' \cdot x' = Y_g$. Par construction $X = x + x' \geqslant 0$, donc pour un X donné il est possible de définir une borne supérieure de Y_g. Pour mettre en avant cette borne, considérons $x = 0$, $x' = X$, $k = 1$ et $k' = n_g - 1$, alors :

$$Y_g \leqslant (n_g - 1)X.$$

• Cas 2 : Pour résumer, nous obtenons une équation fonctionnelle :

$$\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, X, Y_g) = \beta(2, n, X, Y) \ ,$$

qui tient pour tout Y, n, avec $Y_g \leqslant (n_g - 1)X$, pour un X donné et $n_g \geqslant 2$. Afin de vérifier que l'équation fonctionnelle ($\star\star\star$) tient pour tout Y_g, considérons à présent $\mathbf{x}^g = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k_1 \text{ fois}}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{k_2 \text{ fois}}, \underbrace{x_3, \ldots, x_3}_{k_3 \text{ fois}})$ avec :

$$k_1 + k_2 + k_3 = n_g \quad ; \quad k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = Y_g \quad ; \quad 0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3.$$

En appliquant le même raisonnement que précédemment, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= [\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, x_1 + x_2, Y_g) - \beta(2, n, x_1 + x_2, Y)]I(x_1, x_2, 2) \\ &+ [\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, x_1 + x_3, Y_g) - \beta(2, n, x_1 + x_3, Y)]I(x_1, x_3, 2) \\ &+ [\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, x_2 + x_3, Y_g) - \beta(2, n, x_2 + x_3, Y)]I(x_2, x_3, 2). \end{aligned} \tag{2}$$

Nous montrons que les 2 derniers éléments de (2) à droite de l'égalité satisfont l'équation fonctionnelle ($\star\star\star$). Soit $X = x_1 + x_3$ de telle sorte que :

$$[\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, X, Y_g) - \beta(2, n, X, Y)]I(x_1, x_3, 2) = 0$$

D'après ($\star\star\star$) cette équation est nulle si $Y_g \leqslant (n_g-1)X$. Par construction $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3$ tel que $I(x_1, x_3, 2) > 0$ et $Y_g = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$, ainsi :

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 < k_1x_1 + (k_2 + k_3)x_3.$$

Supposons $x_1 = 0$ avec $k_1 = 1$. En posant $k_2 + k_3 = n_g - 1$, il s'ensuit : $Y_g < (n_g-1)X$. A présent, considérons le dernier élément à droite de l'égalité dans (2) tel que $X = x_2 + x_3$; nous avons :

$$[\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, X, Y_g) - \beta(2, n, X, Y)]I(x_2, x_3, 2) = 0.$$

Cette équation est nulle si $Y_g \leqslant (n_g-1)X$. En invoquant ($\star\star\star$) et en rappelant que $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3$ tel que $I(x_1, x_2, 2) > 0$ et $Y_g = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$, nous obtenons :

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 < k_2x_2 + (k_1 + k_3)x_3 \ .$$

En considérant $x_1 = 0$ et $k_1 = 1$, nous constatons que : $k_2x_2 + (k_1 + k_3)x_3 < (n_g-1)X$. Par conséquent, nous déduisons une nouvelle fois que : $Y_g < (n_g - 1)X$. Enfin, nous nous intéressons au premier terme entre crochets dans (2) tel que $X = x_1 + x_2$:

$$[\alpha(n_g, n, Y_g, Y)\beta(2, n_g, X, Y_g) - \beta(2, n, X, Y)]I(x_1, x_2, 2) = 0 \ .$$

Puisque $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3$, nous avons par définition $I(x_1, x_2, 2) > 0$. Dans ce dernier cas, il s'agit de comparer $Y_g = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ à $(k_1 + k_3)x_1 + k_2x_2$. En reprenant la même configuration que pour les deux cas précédents avec $k_1 = 1$ et $x_1 = 0$, nous constatons que lorsque $k_3 \geqslant 1$ il est toujours possible de choisir une valeur de x_3 qui soit suffisamment élevée de façon à ce que :

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 > (k_1 + k_3)x_1 + k_2x_2 \quad \text{soit en général,} \quad Y_g > (n_g - 1)X.$$

Par conséquent ($\star\star\star$) tient quel que soit Y_g. En définitive, la seule solution possible de (A3) pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+$ est :

$$\alpha(n_g, n, Y_g, Y) = \frac{\beta(2, n, x_i + x_j, Y)}{\beta(2, n_g, x_i + x_j, Y_g)}, \tag{S1}$$

avec $n_g \geqslant 2$.

<u>ÉTAPE 2 :</u> Nous démontrons que $\alpha(2, n, x_i + x_j, Y) = \beta(2, n, x_i + x_j, Y)$. Considérons l'équation (A2), en réarrangeant les termes, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = {} & \beta(2, n, x_1 + x_2, Y) I(x_1, x_2, 2) \\ & + \sum_{i=1}^{2} \beta(2, n, x_i + x_3, Y) I(x_i, x_3, 2) \\ & + \sum_{i=1}^{3} \beta(2, n, x_i + x_4, Y) I(x_i, x_4, 2) \\ & + \cdots \\ & + \sum_{i=1}^{n-3} \beta(2, n, x_i + x_{n-2}, Y) I(x_i, x_{n-2}, 2) \\ & + \sum_{i=1}^{n-2} \beta(2, n, x_i + x_{n-1}, Y) I(x_i, x_{n-1}, 2) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \beta(2, n, x_i + x_n, Y) I(x_i, x_n, 2). \end{aligned} \tag{A4}$$

Supposons maintenant que $\mathbf{x} = ((x_1, \ldots, x_{n-2}), (x_{n-1}, x_n))$ et appliquons (DEC1). Afin de faciliter l'écriture de nos indicateurs, nous introduisons de nouvelles notations. Soit $\mathbf{x}_{-1}$ [resp. Y_{-1}] la distribution $\mathbf{x}$ [resp. la masse de revenu Y] retranchée du revenu x_n, $\mathbf{x}_{-2}$ [resp. Y_{-2}] la distribution $\mathbf{x}$ [resp. la masse de revenu Y] retranchée des revenus x_n et x_{n-1}, et ainsi de suite, alors :

$$\begin{aligned} I(((x_1,\ldots,x_{n-2}),(x_{n-1},x_n)),n) = {} & \alpha(n-2,n,Y_{-2},Y)I(\mathbf{x}_{-2},n-2) \\ & + \alpha(2,n,x_{n-1}+x_n,Y)I(x_{n-1},x_n,2) \\ & + \sum_{i=1}^{n-2}\beta(2,n,x_i+x_{n-1},Y)I(x_i,x_{n-1},2) \\ & + \sum_{i=1}^{n-2}\beta(2,n,x_i+x_n,Y)I(x_i,x_n,2). \end{aligned}$$

En affectant une nouvelle fois le dernier individu de la distribution à un sous-groupe à part et en répétant le procédé de décomposition en commençant par $I(\mathbf{x}_{-2},n-2)$, il vient :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x},n) = {} & \beta(2,n,x_1+x_2,Y)I(x_1,x_2,2) \\ & + \sum_{i=1}^{2}\beta(2,n,x_i+x_3,Y)I(x_i,x_3,2) \\ & + \cdots \\ & + \sum_{i=1}^{n-4}\beta(2,n,x_i+x_{n-3},Y)I(x_i,x_{n-3},2) \\ & + \sum_{i=1}^{n-3}\beta(2,n,x_i+x_{n-2},Y)I(x_i,x_{n-2},2) \\ & + \alpha(2,n,x_{n-1}+x_n,Y)I(x_{n-1},x_n,2) \\ & + \sum_{i=1}^{n-2}\beta(2,n,x_i+x_{n-1},Y)I(x_i,x_{n-1},2) \\ & + \sum_{i=1}^{n-2}\beta(2,n,x_i+x_n,Y)I(x_i,x_n,2). \end{aligned} \tag{A5}$$

L'égalisation de (A4) et (A5) permet d'annuler un certain nombre de facteurs de pondération, à l'exception de :

$$[\beta(2,n,x_{n-1}+x_n,Y)-\alpha(2,n,x_{n-1}+x_n,Y)]I(x_{n-1},x_n,2)=0.$$

Par conséquent, si $x_{n-1} \neq x_n$ alors, $\alpha(2, n, x_{n-1} + x_n, Y) = \beta(2, n, x_{n-1} + x_n, Y)$. Imaginons à présent que $\mathbf{x} := ((x_1, \ldots, x_n), (x_i, x_j))$ de telle sorte que les individus i et j appartiennent à un même sous-groupe. Nous remarquons alors que (A5) peut s'obtenir en mesurant $I(\mathbf{x}, n)$ sur la bi-partition $\mathbf{x} = ((\mathbf{x}_{-2}), (x_i, x_j))$, tel que $I(\mathbf{x}, n)$ satisfait (SM). D'après (SM), en égalisant (A4) et (A5) nous obtenons finalement :

$$\alpha(2, n, x_i + x_j, Y) = \beta(2, n, x_i + x_j, Y) \ , \ \forall n \geqslant 2, \tag{S2}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$. Notons que dans le cas particulier où $n = 2$: $\alpha(2, 2, x_i + x_j, Y) = \beta(2, 2, x_i + x_j, Y) = 1$.

<u>ÉTAPE 3 :</u> Rappelons que $\mu_{ij} = \frac{x_i + x_j}{2}$ est la moyenne de revenus de deux individus appartenant à deux sous-groupes différents, et que μ_g est la moyenne des revenus du sous-groupe g. En posant $n =: \tilde{n}$ et $Y =: \tilde{Y}$ comme constants, (S1) se réécrit :

$$\beta(2, n_g, 2\mu_{ij}, Y_g) = \frac{\beta(2, \tilde{n}, 2\mu_{ij}, \tilde{Y})}{\alpha(n_g, \tilde{n}, n_g \mu_g, \tilde{Y})}. \tag{S1'}$$

En définissant $\theta(n_g, \mu_g) := \alpha(n_g, \tilde{n}, n_g \mu_g, \tilde{Y})$, (S2) nous permet d'avoir :

$$\beta(2, \tilde{n}, 2\mu_{ij}, \tilde{Y}) = \theta(2, \mu_{ij}).$$

En intégrant ce résultat dans (S1') il vient :

$$\beta(2, n_g, 2\mu_{ij}, Y_g) = \frac{\theta(2, \mu_{ij})}{\theta(n_g, \mu_g)} \ ,$$

avec $\theta(n_g, \mu_g) \neq 0$ une fonction non nulle à valeurs réelles par construction. Soit, de manière générale :

$$\beta(2, n, 2\mu_{ij}, Y) = \frac{\theta(2, \mu_{ij})}{\theta(n, \mu)} \ , \tag{S1''}$$

tel que $\theta(n, \mu) \neq 0$. Or, d'après (S2) :

$$\alpha(2, n, 2\mu_{ij}, Y) = \beta(2, n, 2\mu_{ij}, Y) = \frac{\theta(2, \mu_{ij})}{\theta(n, \mu)}.$$

En introduisant $\beta(2, n_g, 2\mu_{ij}, Y_g)$ et $\beta(2, n, 2\mu_{ij}, Y)$ dans (S1) nous obtenons enfin :

$$\alpha(n_g, n, Y_g, Y) = \frac{\theta(n_g, \mu_g)}{\theta(n, \mu)} \ ; \tag{S3}$$

pour tout $n_g \geqslant 2$.[8] En remplaçant les expressions des poids de l'équation (S1) par (S1") et (S3) et en faisant appel à la continuité (CN) de $I(\mathbf{x}, n)$, nous déduisons que $\theta(n, \mu) \equiv \theta(n, \mu(\mathbf{x})) \neq 0$ est continue pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$. Par conséquent, $\theta(n_g, \mu_g)$ et $\theta(2, \mu_{ij})$ sont également des fonctions continues. La continuité de $\alpha(n_g, n, Y_g, Y)$ et $\beta(2, n, x_i + x_j, Y)$ se déduit donc aisément. □

Les expressions des fonctions de pondération intragroupes $\alpha(\cdot)$ correspondent en tout point à celles avancées par Shorrocks (1980, Théorème 1).[9] La principale différence entre notre axiome (DEC1) et celui de décomposition additive (DA) tient donc essentiellement à la spécification de la composante intergroupe.

Pour caractériser la famille des mesures additivement décomposables, Shorrocks (1980) n'utilise pas plus de quatre axiomes, à savoir : l'axiome de symétrie, de normalisation, de continuité des dérivées partielles de premier ordre de la mesure d'inégalités[10] ainsi que celui de décomposition additive. Il montre ainsi que la classe des mesures additivement décomposables se résume à l'expression suivante :

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{\theta(\mu, n)} \sum_{i=1}^{n} \left[\phi(x_i) - \phi(\mu)\right], \tag{7}$$

où $\theta(\mu, n)$ est une fonction de pondération positive et où $\phi(\cdot)$ est strictement convexe.

8. Comme le fait remarquer Shorrocks (1980), nous considérons que la fonction de pondération $\alpha(n_g, n, Y_g, Y)$ est dénuée de sens lorsque $n_g = 1$, puisque $I(x, 1) = 0$.

9. En utilisant (CN), (NM), (SM) et (DA), Shorrocks (1980) démontre que $\omega_g^G(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{n}) = \frac{\theta(\mu_g, n_g)}{\theta(\mu, n)}$.

10. Shorrocks (1984) obtient un résultat analogue en invoquant la continuité au lieu de la dérivabilité qui est souvent remise en question dans les caractérisations axiomatiques.

Cette expression constitue un résultat clé dans la littérature. D'une part, parce qu'elle repose sur peu d'axiomes et d'autre part, car son application ne se limite pas au champ des inégalités unidimensionnelles. Elle s'étend à plusieurs dimensions au travers des travaux de Tsui (1999) ou Dièz *et al.* (2008), mais également aux mesures de divergences comme le mentionnent Magdalou et Nock (2011) ainsi qu'aux mesures de pauvreté traitées entre autres par Foster et Shorrrocks (1991).

Dans le théorème qui suit, nous montrons qu'il est possible d'obtenir un résultat très proche de celui de Shorrocks (1980, 1984) en substituant simplement à la propriété de décomposition additive (DA), celle de décomposition faible (DEC1) ; les autres propriétés restant inchangées.

Théorème 3.2.1 *Une mesure d'inégalités satisfait* (CN), (NM), (SM) *et* (DEC1) *si et seulement si,*

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{2 \cdot \theta(n, \mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(x_i, x_j), \tag{7'}$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $\phi : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est une fonction continue telle que* $\phi(x_i, x_j) = \theta(2, \mu_{ij}) I(x_i, x_j, 2)$ *et* $\phi(\xi, \xi) = 0$.

Preuve.
(Nécessité) : Soit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ une distribution de revenus de taille n et supposons que $I(\mathbf{x}, n)$ satisfait (CN), (NM), (SM), et (DEC1). En scindant la population initiale en deux sous-groupes, tels que $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est le premier sous-groupe et x_n le second, puis en utilisant le résultat (S3), nous avons :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = & \frac{\theta\left(n-1, \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} I((x_1, \ldots, x_{n-1}), n-1) \\ & + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta\left(2, \frac{x_i+x_n}{2}\right)}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} I(x_i, x_n, 2). \end{aligned}$$

Envisageons, à présent, que $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ peut également être découpé en deux sous-groupes tels que $(x_1, \ldots, x_{n-2})$ constitue un premier sous-groupe et que x_{n-1} représente le second. L'équation précédente se réécrit :

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{x}, n) = {} & \frac{\theta\left(n-1, \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} \left[\frac{\theta\left(n-2, \frac{x_1+\cdots+x_{n-2}}{n-2}\right)}{\theta\left(n-1, \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)} I((x_1, \ldots, x_{n-1}), n-1)\right] \\
& + \frac{\theta\left(n-1, \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta\left(2, \frac{x_i+x_{n-1}}{2}\right)}{\theta\left(n-1, \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1}\right)} I(x_i, x_{n-1}, 2)\right] \\
& + \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta\left(2, \frac{x_i+x_n}{2}\right)}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} I(x_i, x_n, 2) \\
= {} & \frac{1}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} \left[\theta\left(n-2, \frac{x_1+\cdots+x_{n-2}}{n-2}\right) I((x_1, \ldots, x_{n-1}), n-1)\right] \\
& + \frac{1}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} \left[\sum_{i=1}^{n-1} \theta\left(2, \frac{x_i+x_{n-1}}{2}\right) I(x_i, x_{n-1}, 2)\right] \\
& + \frac{1}{\theta\left(n, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)} \sum_{i=1}^{n} \theta\left(2, \frac{x_i+x_n}{2}\right) I(x_i, x_n, 2).
\end{aligned}
$$

En appliquant le même raisonnement à chacun des membres de $\mathbf{x}$ nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
I(\mathbf{x}, n) = {} & \frac{1}{\theta\left(n, \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)} \left[\theta\left(2, \frac{x_1+x_2}{2}\right) I(x_1, x_2, 2)\right] \\
& + \cdots \\
& + \frac{1}{\theta\left(n, \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)} \sum_{i=1}^{n} \theta\left(2, \frac{x_i+x_n}{2}\right) I(x_i, x_n, 2).
\end{aligned}
$$

Alors :

$$
I(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{2 \cdot \theta\left(n, \mu\right)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta\left(2, \mu_{ij}\right) I(x_i, x_j, 2). \tag{A6}
$$

Posons $\phi(x_i, x_j) := \theta\left(2, \mu_{ij}\right) I(x_i, x_j, 2)$, (A6) devient :

$$
I(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{2 \cdot \theta(n, \mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(x_i, x_j).
$$

Or, d'après (S3), $\theta(n,\mu)$ est une fonction continue. Nous déduisons donc que $\phi(\cdot)$ hérite de la propriété de continuité. Par conséquent, $\phi:\mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue, avec $\phi(\xi,\xi) \overset{\text{NM}}{=} 0$.

(Suffisance) : Compte tenu du fait que $\theta\left(2,\mu_{ij}\right) I(x_i,x_j,2)=\phi(x_i,x_j)$, nous pouvons écrire que :

$$I(\mathbf{x},n)=\frac{1}{2\cdot\theta(n,\mu)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta\left(2,\mu_{ij}\right) I(x_i,x_j,2). \tag{A7}$$

D'après l'équation (A7), l'inégalité relative au sous-groupe $g\in\{1,2\}$ est :

$$I(\mathbf{x}^g,n_g)=\frac{1}{2\cdot\theta(n_g,\mu_g)}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_g}\theta\left(2,\mu_{ij}\right) I(x_i^g,x_j^g,2). \tag{A8}$$

Pour une population partitionnée en $G=2$ sous-groupes, l'équation (A8) peut alors s'exprimer comme :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x},n) = & \sum_{g=1}^{G}\frac{1}{2\cdot\theta(n,\mu)}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_g}\theta\left(2,\mu_{ij}\right) I(x_i^g,x_j^g,2) \\ & + \ 2\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{1}{2\cdot\theta(n,\mu)}\theta\left(2,\mu_{ij}\right) I(x_i^1,x_j^2,2). \end{aligned}$$

En substituant l'équation (A8) dans l'expression précédente il vient :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x},n) = & \sum_{g=1}^{G}\frac{2\cdot\theta(n_g,\mu_g)}{2\cdot\theta(n,\mu)}\sum_{i=1}^{n_g}\sum_{j=1}^{n_g}\frac{\theta\left(2,\mu_{ij}\right)}{2\cdot\theta(n_g,\mu_g)} I(x_i^g,x_j^g,2) \\ & + \ 2\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\frac{1}{2\cdot\theta(n,\mu)}\theta\left(2,\mu_{ij}\right) I(x_i^1,x_j^2,2). \end{aligned}$$

Le respect de (DEC1) est donc assuré. Le respect de (NM), (SM) et (CN) se déduit directement de la structure globale de l'indicateur. □

Notre caractérisation est très proche de celle de Shorrocks (1980). La structure générale des indicateurs d'inégalités s'apparente à une somme pondérée de fonctions ϕ. Alors que la décomposition additive fait intervenir la différence entre deux fonctions $\phi(\cdot)$: l'une appliquée directement à la distribution de revenus, l'autre appliquée à la moyenne des revenus ; la décomposition faible laisse apparaître une seule fonction $\phi(\cdot,\cdot)$ qui dépend de deux arguments. Cette nouvelle forme fonctionnelle pourtant très proche de celle envisagée dans le cas additif représente l'ensemble des comparaisons interpersonnelles (par paire d'individus) de revenus (pondérées). Le Théorème 3.2.1 ne présente néanmoins qu'une formulation très sommaire des mesures d'inégalités faiblement décomposables. Leur expression peut être raffinée en faisant appel à d'autres propriétés axiomatiques, telles que l'invariance par réplication (PP) par exemple.

Proposition 3.2.1 *Une mesure d'inégalités satisfait* (CN), (NM), (SM), (DEC1) *et* (PP) *si et seulement si,*

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2 \cdot c(\mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c(\mu_{ij}) I(x_i, x_j, 2), \tag{8}$$

où $I(\cdot,\cdot,2) : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *est continue telle que* $I(\xi, \xi, 2) = 0$.

Preuve.

(Nécessité) : Supposons que la distribution de revenus $\mathbf{x}$ est répliquée un nombre k de fois, c'est-à-dire, que $\mathbf{x}^{[k]} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{k \text{ fois}}) \in \mathbb{R}_+^{kn}$ avec $k \geqslant 2$. D'après l'équation (7') nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}^{[k]}, k \cdot n) =& \frac{1}{2 \cdot \theta(k \cdot n, \mu)} \sum_{\ell=1}^{k \cdot n} \sum_{m=1}^{k \cdot n} \phi(x_\ell, x_m) \\ =& \frac{k^2}{2 \cdot \theta(k \cdot n, \mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(x_i, x_j). \end{aligned}$$

En faisant appel au principe d'invariance par réplication (PP) nous savons que $I(\mathbf{x}^{[k]}, k \cdot n) = I(\mathbf{x}, n)$, soit :

$$\frac{k^2}{2 \cdot \theta(k \cdot n, \mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(x_i, x_j) = \frac{1}{2 \cdot \theta(n, \mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \phi(x_i, x_j).$$

En regroupant les différents termes de l'équation précédente nous obtenons :

$$\left[\frac{k^2}{2\cdot\theta(k\cdot n,\mu)}-\frac{1}{2\cdot\theta(n,\mu)}\right]\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\phi(x_i,x_j)=0.$$

D'après le Théorème 3.2.1, quelle que soit la distribution $\mathbf{x}$ (en supposant qu'il ne s'agit pas d'une distribution égalitaire), $\sum_i\sum_j\phi(x_i,x_j)>0$ par (NM). Nous déduisons alors que :

$$\frac{k^2}{2\cdot\theta(k\cdot n,\mu)}=\frac{1}{2\cdot\theta(n,\mu)}\iff k^2\cdot\theta(n,\mu)=\theta(k\cdot n,\mu).$$

Avec (PP), μ reste constante *c.-à-d.*, $\tilde{\mu}:=\mu$. D'où :

$$k^2\cdot\theta(n,\tilde{\mu})=\theta(k\cdot n,\tilde{\mu}).$$

Il s'agit d'une équation fonctionnelle fondamentale de Cauchy dont la solution est donnée par [voir Aczél (1966) Chap. 1 p. 15] :

$$\theta(n,\tilde{\mu})=c(\tilde{\mu})\cdot n^2.$$

Rappelons que $\phi(x_i,x_j)=\theta(2,\mu_{ij})I(x_i,x_j,2)$. Nous pouvons donc considérer que la structure de $\theta(2,\mu_{ij})$ est identique à celle de $\theta(n_g,\mu_g)$, de telle sorte que $\theta(2,\mu_{ij})=2^2\cdot c(\mu_{ij})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}I(\mathbf{x},n)=&\frac{1}{2\cdot n^2\cdot c(\mu)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2^2\cdot c(\mu_{ij})I(x_i,x_j,2)\\=&\frac{2}{n^2\cdot c(\mu)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c(\mu_{ij})I(x_i,x_j,2),\end{aligned}\tag{8}$$

tel que $I(\cdot,\cdot,2):\mathbb{R}_+^2\longrightarrow\mathbb{R}_+$ est une fonction continue et $I(\xi,\xi,2)=0$ d'après (NM).

(Suffisance) : Le respect de (DEC1) découle directement de la preuve du Théorème 3.2.1, en posant $\frac{c(\mu_{ij})}{c(\mu)}=\frac{n^2\theta(2,\mu_{ij})}{2^2\theta(n,\mu)}$. Le respect de (PP), (NM), (CN) et (SM) est assuré par construction. □

L'ajout de cette nouvelle propriété autorise les comparaisons entre mesures d'inégalités évaluées sur des populations de tailles différentes. De plus, la caractérisation que nous obtenons avec notre nouvel axiome de décomposition faible (DEC1) reste cohérente avec les mesures bien connues de la littérature – également incluses dans les classes de mesures définies par Ebert (2010) – telles que l'indice de Gini (absolu ou relatif), le coefficient de variation élevé au carré, la variance ou encore la variance des logarithmes qui satisfont pour la plupart le principe de transferts de Pigou-Dalton ou plus généralement le principe de concentration introduit par Ebert (2010, p.96). Par exemple, l'extension de la différence moyenne de Gini (G_a^α) suggérée par Ebert (2010), ainsi que l'extension du coefficient de Gini [11] (G_r^α) satisfont toutes deux (DEC1). [12] Pour rappel :

$$G_a^\alpha(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^\alpha \ ;$$

et,

$$G_r^\alpha(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{n^2 \mu(\mathbf{x})^\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^\alpha.$$

Enfin, l'avantage majeur de la formulation des mesures faiblement décomposables proposée par l'équation (7') réside dans son application qui ne se limite pas aux inégalités de revenus. Elle peut, en effet, être adaptée à divers domaines de recherche dans lesquels la notion de décomposition faible est pourvue de sens. Ce procédé de décomposition est notamment utilisé dans les récents travaux de Chakravarty *et al.* (2013) qui proposent une analyse des inégalités en termes d'accomplissement et d'échec personnel. Plus largement, cette décomposition peut être envisagée dans le cas de mesures de pauvreté, de diversité ou encore de mobilité, comme nous l'avons montré au cours du chapitre précédent. Certains auteurs préfèrent, néanmoins, privilégier l'utilisation de la décomposition additive plutôt que celle de la décomposition faible.

11. Cette extension correspond à la famille des $\alpha-$Gini présentée dans notre Chapitre 1.
12. Pour plus de détails, voir Lasso de la Vega *et al.* (2013)

Comme cela est argumenté dans le paragraphe ci-après, il n'existe pas de méthode de décomposition « meilleure » qu'une autre. Tout dépend des résultats que l'analyste souhaite faire ressortir au travers de son étude.

3.2.3 Une discussion sur les méthodes de décomposition

Au cours de cette section, nous nous interrogeons sur les avantages et les inconvénients que confèrent chacune des propriétés de décomposition en sous-groupes évoquées précédemment, à savoir, la décomposition additive (DA) et la décomposition faible reconsidérée (DEC1). Pour ce faire, nous adoptons une démarche analogue à celle proposée par Mussard (2007), afin de discuter de l'impact de transferts de type Pigou-Dalton sur les différentes composantes issues des deux procédés de décomposition. Notre démarche vise principalement les indicateurs dont la structure est compatible à la fois avec (DA) et (DEC1) et pour lesquels le choix de la méthode à retenir n'est pas toujours évident. Cette section a donc, pour but, d'éclairer l'analyste dans son choix, tout en gardant une approche la plus objective possible.

Supposons une population de taille n subdivisée en deux sous-groupes. Pour construire notre raisonnement, nous choisissons de travailler avec les mesures de la famille de l'entropie généralisée qui figurent parmi les premières mesures à avoir été reconnues comme additivement décomposables au sens de Shorrocks (1980). De manière générale, ces mesures peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{n_1\alpha(\mu(\mathbf{x}^1))}{n\alpha(\mu(\mathbf{x}))} I(\mathbf{x}^1, n_1) + \frac{n_2\alpha(\mu(\mathbf{x}^2))}{n\alpha(\mu(\mathbf{x}))} I(\mathbf{x}^2, n_2) + I(\mu(\mathbf{x}^1)\mathbf{1}_{n_1}, \mu(\mathbf{x}^2)\mathbf{1}_{n_2}, n)\,.$$

Les mesures faiblement décomposables peuvent, quant à elles, être représentées par l'expression suivante :

$$I(\mathbf{x},n) = \frac{n_1^2 c(\mu(\mathbf{x}^1))}{n^2 c(\mu(\mathbf{x}))} I(\mathbf{x}^1,n_1) + \frac{n_2^2 c(\mu(\mathbf{x}^2))}{n^2 c(\mu(\mathbf{x}))} I(\mathbf{x}^2,n_2)$$
$$+ \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} \frac{2^2 c(\mu(x_i^1,x_j^2))}{n^2 c(\mu(\mathbf{x}))} I(x_i^1,x_j^2,2) \ .$$

A présent, étudions les impacts que des transferts de revenus au sens de Pigou et Dalton peuvent avoir sur de telles mesures. Nous supposons que les individus concernés par la relation de transfert conservent la même position (rang) au sein de la distribution avant et après transfert, quels que soient le ou les sous-groupes dans lesquels cette opération a lieu. Nous considérons, en effet, qu'une telle action de redistribution peut être appliquée, soit entre des individus appartenant à un même sous-groupe, soit entre des individus appartenant à des sous-groupes différents. Nous portons une attention particulière à la réaction des composantes intergroupes issues de la décomposition additive (DA) et faible (DEC1). Rappelons que les mesures faiblement décomposables dérivées de la variance des logarithmes ne sont pas compatibles avec le principe de Pigou et Dalton. Par conséquent nous nous focalisons sur les mesures $\alpha-$Gini (sous leur forme absolue G_a^α et relative G_r^α).

Imaginons, tout d'abord, qu'un transfert progressif de revenu d'un montant $\delta > 0$ est appliqué au sein d'un même sous-groupe, entre un individu à haut revenu, noté j et un individu dont le revenu est plus faible, noté i. Compte tenu du fait qu'il s'agit d'une redistribution entre deux individus appartenant à un même sous-groupe, la moyenne de ce sous-groupe reste inchangée. Dans le cas de la décomposition additive, un tel transfert n'a d'effet que sur la composante visant à évaluer les inégalités à l'intérieur du sous-groupe dans lequel a lieu le transfert puisque la composante intergroupe est calculée à partir de la moyenne des deux sous-groupes. Une diminution de l'inégalité intragroupe est alors constatée, ce qui entraîne également une diminution de l'inégalité globale. Dans le cas de la décomposition faible, le revenu de chaque individu est comparé à celui d'un autre individu appartenant au même sous-groupe que lui (inégalité intragroupe) ou à un autre sous-groupe (inégalité intergroupe). Tout changement dans le revenu d'un individu affecte donc les écarts de revenus entre cet individu et le reste de la population, entraînant de ce fait une modification à la fois la composante intragroupe et de la composante intergroupe. L'effet réducteur est donc double dans ce second cas puisque la valeur des deux composantes est amoindrie.

Plus précisément, en considérant l'expression générale des mesures de l'entropie généralisée, nous pouvons exprimer les formulations des différentes composantes avant et après transfert. Par exemple, avant transfert, les indices intragroupes correspondent à :

$$I(\mathbf{x}^g, n_g) = \frac{1}{c(c-1)\cdot n_g} \sum_{r=1}^{n_g} \left[\left(\frac{x_r^g}{\mu(\mathbf{x}^g)} \right)^c - 1 \right] \ , \quad \text{pour tout } c \neq 0, 1,$$

et l'indice intergroupe tel que $g \in \{1, 2\}$ est :

$$I_B = I(\mu(\mathbf{x}_1)\mathbf{1}_{n_1}, \mu(\mathbf{x}_2)\mathbf{1}_{n_2}, n).$$

Soit $\tilde{\mathbf{x}}^g$ la distribution de revenus du sous-groupe g après transfert. Après application d'un transfert d'un montant (infinitésimal) $\delta > 0$ à l'intérieur d'un des sous-groupes g tel que $x_i^g + \delta \leqslant x_{i+1}^g$ et $x_{j-1}^g \leqslant x_j^g - \delta$, l'expression de l'indicateur intragroupe devient :

$$I(\tilde{\mathbf{x}}^g, n_g) = \frac{1}{c(c-1)\cdot n_g} \left(\sum_{r\neq i,j}^{n_g} \left[\left(\frac{x_r^g}{\mu(\mathbf{x}^g)} \right)^c - 1 \right] + \left(\frac{x_i^g + \delta}{\mu(\mathbf{x}^g)} \right)^c - 1 + \left(\frac{x_j^g - \delta}{\mu(\mathbf{x}^g)} \right)^c - 1 \right) ,$$

avec $g \in \{1, 2\}$ et $\mu(\mathbf{x}^g) = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} x_r^g = \frac{1}{n} \left(\sum_{r\neq i,j}^{n} x_r^g + x_i^g + \delta + x_j^g - \delta \right)$.

Le dénominateur étant commun aux deux indices calculés avant et après opération de transfert, la détermination du signe de la variation entraînée par cette opération peut finalement être établie sur la base du calcul suivant :

$$I(\mathbf{x}^g, n_g) - I(\tilde{\mathbf{x}}^g, n_g) = \frac{1}{c(c-1)\cdot n_g}\cdot\frac{1}{\mu(\mathbf{x}^g)^c}\left((x_i^g)^c + (x_j^g)^c - (x_i^g+\delta)^c - (x_j^g-\delta)^c\right) .$$

Par définition, cette différence est positive pour tout $c \neq 0, 1$. Nous observons bien une diminution des inégalités (intragroupes) à la suite d'un transfert de revenus intragroupe, lorsque la mesure est additivement décomposable. La composante I_B reste identique avant et après transfert.

Pour ce qui est des mesures faiblement décomposables, avant transfert les indices intragroupes sont tels que :

$$I(\mathbf{x}^g, n_g) = \frac{1}{2\cdot n_g^2\cdot c(\mu(\mathbf{x}^g))}\sum_{r=1}^{n_g}\sum_{r'=1}^{n_g}|x_r^g - x_{r'}^g|^\alpha \ , \quad \text{avec } g\in\{1,2\} \quad \text{et} \quad \alpha \geqslant 1,$$

l'indice intergroupe s'écrit alors :

$$I_B = \frac{1}{2\cdot 2^2}\sum_{r=1}^{n_1}\sum_{r'=1}^{n_2}\frac{|x_r^1 - x_{r'}^2|^\alpha}{c(\mu(x_r^1, x_{r'}^2))} \ .$$

Les expressions des deux composantes sont affectées par l'application du transfert. D'une part l'inégalité à l'intérieur du sous-groupe g est telle que :

$$\begin{aligned} I(\tilde{\mathbf{x}}^g, n_g) = \frac{1}{2\cdot n_g^2\cdot c(\mu(\mathbf{x}^g))}\Bigg(&\sum_{r,r'\neq i,j}^{n_g}|x_r^g - x_{r'}^g|^\alpha + \sum_{r\neq i,j}^{n_g}|(x_i^g+\delta) - x_r^g|^\alpha \\ &+ \sum_{r'\neq i,j}^{n_g}|(x_j^g-\delta) - x_{r'}^g|^\alpha + |(x_j^g-\delta) - (x_i^g+\delta)|^\alpha\Bigg). \end{aligned}$$

D'autre part, dans le cas où les individus i et j sont localisés dans le sous-groupe 1,[13] l'indice intergroupe devient :

$$I_B = \frac{1}{2 \cdot 2^2} \left(\sum_{r \neq i,j}^{n_1} \sum_{r'=1}^{n_2} \frac{|x_r^1 - x_{r'}^2|^\alpha}{c(\mu(x_r^1, x_{r'}^2))} + \sum_{r'=1}^{n_2} \frac{|(x_i^1 + \delta) - x_{r'}^2|^\alpha}{c(\mu((x_i^1 + \delta), x_{r'}^2))} \right.$$
$$\left. + \sum_{r'=1}^{n_2} \frac{|(x_j^1 - \delta) - x_{r'}^2|^\alpha}{c(\mu((x_j^1 - \delta), x_{r'}^2))} \right) \ ;$$

Comme le montrent ces expressions, la décomposition faible requiert la comparaison de chaque paire de revenus impliquant les individus concernés par la relation de transfert afin de déterminer son effet sur les indices d'inégalités. En supposant un montant (infinitésimal) de transfert $\delta > 0$ et $\alpha \geqslant 1$, la baisse de l'inégalité globale est assurée par le transfert intragroupe. Cette baisse résulte alors d'une diminution conjointe des écarts de revenus entre les individus d'un même sous-groupe et ceux situés dans des sous-groupes distincts.

A l'issue de ces premiers résultats, nous pouvons dire que les deux méthodes de décomposition réagissent favorablement à une redistribution de nature intragroupe, dans le sens où elles conduisent toutes deux à une diminution des inégalités globales. A ce stade de la discussion, le choix entre (DA) et (DEC1) repose sur la répartition des inégalités observées au sein de la population étudiée. Si, par exemple, les inégalités sont importantes dans un sous-groupe mais qu'elles apparaissent relativement faibles entre les sous-groupes formés, la méthode de décomposition additive (DA) peut être envisagée. L'analyse offerte par la décomposition additive permet de cibler un sous-groupe en particulier, toutes choses étant égales par ailleurs. *A contrario* la méthode de décomposition faible insiste sur le caractère individuel de l'inégalité. Elle permet ainsi de tenir compte de l'ensemble des répercussions que peut entraîner la modification du revenu d'un individu sur le reste de la population. Ebert (2010, p. 95) suggère, notamment, l'emploi de la décomposition faible dans le cadre

13. Du fait de la présence des valeurs absolues, le même calcul tient dans le cas où les individus i et j appartiennent au sous-groupe 2.

d'études impliquant des transferts entre individus de sous-groupes différents.

Nous supposons désormais qu'un transfert progressif de revenu est opéré entre individus appartenant à deux sous-groupes différents, tel que l'individu j du sous-groupe 2 transfère un montant $+\delta > 0$ de son revenu à l'individu i du sous-groupe 1 tel que $\mu(\mathbf{x}^1) < \mu(\mathbf{x}^2)$. Les impacts de cette nouvelle action sur les différentes composantes sont plus complexes à déterminer que dans le précédent cas. Un transfert intergroupe entraîne, notamment, une modification de la moyenne des sous-groupes. Les répercussions de ce transfert sur les composantes d'inégalités dépendent également de la taille des sous-groupes retenus pour l'analyse. Parmi les différentes possibilités de redistribution, l'une des plus intuitives consiste à appliquer une redistribution en choisissant un donneur dans le sous-groupe où la moyenne de revenus est la plus élevée et un receveur dans un sous-groupe où la moyenne de revenus est plus faible. En adoptant un tel schéma de redistribution l'emploi de la décomposition additive permet d'observer une réduction l'écart entre les moyennes des deux sous-groupes, ce qui entraîne une diminution de la composante d'inégalité intergroupe. Dans le cas de la décomposition faible, le transfert doit être appliqué de telle sorte qu'un maximum des écarts de revenus soient amoindris. Son efficacité a donc plus de chance d'être assurée si le transfert s'adresse à l'individu le plus riche du sous-groupe dont la moyenne est la plus forte ($\mu(\mathbf{x}^2)$), pour bénéficier à l'individu le plus pauvre du sous-groupe dont la moyenne est plus faible ($\mu(\mathbf{x}^1)$). Les écarts entre les extrémités de la distribution s'amenuisent, entraînant une réduction des inégalités à l'intérieur des sous-groupes du donneur et du receveur et *a fortiori* une baisse de l'inégalité totale.

Il n'est cependant pas exclu que de tels transferts conduisent à une augmentation des composantes intragroupes ou intergroupes alors que l'inégalité globale se réduit (conséquence immédiate du principe de Pigou et Dalton sur la distribution totale). Ces augmentations peuvent, alors, être contrebalancées par l'application de transferts intragroupes complémentaires de montants différents. Pour clore cette discussion sur les différents procédés de décomposition en sous-groupes, nous introduisons un exemple numérique simple afin d'illustrer et de résumer les principales variations constatées sur les composantes intra- ou intergroupes à la suite de transferts. Pour faciliter les comparaisons, nous retenons un indicateur statistique qui présente la particularité de satisfaire à la fois (DA) et (DEC1) : le coefficient de variation élevé au carré. [14] Nous retenons une distribution de dix individus que nous scindons en deux sous-groupes de tailles égales :

Répartition	Revenus individuels					Moyenne
sous-groupe 1	1	3	5	7	9	5
sous-groupe 2	2	4	6	8	10	6

Tableau 3.1 – **Répartition des revenus individuels**

Le coefficient de variation élevé au carré calculé sur cet échantillon s'élève à 0,2728 avec une moyenne de revenus globale de 5,5. Après application des deux procédés de décomposition, nous observons le découpage suivant :

14. La décomposition faible de cet indicateur est réalisée en recourant aux fonctions de pondérations suggérées par Ebert (2010). Nous montrons au paragraphe 3.3.2 qu'il est possible de justifier axiomatiquement une telle structure en substituant à l'axiome d'invariance d'échelle (SI), un axiome plus général.

	(DA)	(DEC1)
CV_{11}^2	0,3200	0,3200
CV_{22}^2	0,2222	0,2222
CV_W^2	0,2645	0,1323
CV_B^2	0,0083	0,1405

Tableau 3.2 – **Inégalités intra- et intergroupes calculées avant transfert.**

Nous constatons une différence notable dans l'appréciation des disparités intra- et intergroupes entre les deux méthodes. Alors que la décomposition additive met en avant des disparités qui semblent essentiellement de nature intragroupe ($CV_W^2 = 0,2645$), la décomposition faible affiche une légère supériorité des inégalités intergroupes ($CV_B^2 = 0,1405$). Les valeurs des deux composantes sont néanmoins très proches dans le cadre de la décomposition faible, contrairement au cas de la décomposition additive. Cette différence résulte de la construction des composantes. L'énoncé des deux propriétés (DA) et (DEC1) laisse à penser que les expressions des composantes intragroupes sont identiques. Une distinction s'observe, néanmoins, au niveau des fonctions de pondération. Dans le cas de la décomposition faible (DEC1) un poids plus important est accordé à la part de population que représente chaque sous-groupe. Les effectifs de chaque sous-groupe sont élevés au carré et représentent le nombre de comparaisons interpersonnelles de revenu dont il faut tenir compte pour déterminer l'inégalité au sein d'un sous-groupe (ou entre deux sous-groupes). Dans le cas de la décomposition additive (DA) les inégalités intragroupes sont calculées en rapportant le revenu de chaque individu à la moyenne de son sous-groupe (tous deux élevés au carré). Les parts de population de chaque sous-groupe sont utilisées directement pour pondérer ces écarts. De plus, la composante intergroupe, telle qu'elle est définie par la décomposition additive, ne nécessite pas de pondération, étant construite à partir des moyennes des différents sous-groupes.

• **Étude de l'impact des transferts intragroupes** : Un montant $\delta = 1$ du revenu d'un individu jugé bien loti est reversé à un individu moins bien loti du même sous-groupe. Lorsque le transfert s'applique entre le deuxième et le quatrième individu du sous-groupe 1 ou du sous-groupe 2 le coefficient de variation élevé au carré affiche une baisse identique de l'ensemble des composantes. Dans les deux cas, le coefficient global après transfert est ramené à une valeur de 0,2529 (voir Tableaux 3.16 et 3.17 en annexes). L'effet réducteur de ces transferts est d'autant plus marqué, lorsqu'ils s'opèrent dans les deux sous-groupes. Le coefficient d'inégalité globale devient alors égal à 0,2331.

	(DA)	(DEC1)
CV_{11}^2	0,27	0,27
CV_{22}^2	0,19	0,19
CV^W	0,2248	0,1124
CV_B^2	0,0083	0,1207

Tableau 3.3 – **Inégalités intra- et intergroupes calculées après application d'un transfert progressif dans chaque sous-groupe.**

Les transferts de type Pigou-Dalton préservent la moyenne des sous-groupes dans lesquels ils sont employés ce qui explique pourquoi la composante d'inégalité intergroupe reste de 0,0083 avec la décomposition additive. Du point de vue de la décomposition faible, la valeur de chacune des composantes est amoindrie par les deux transferts.

• **Étude de l'impact des transferts intergroupes** : Pour avoir un effet sur la composante intergroupe évaluée selon la méthode de décomposition additive, il faut recourir à des transferts progressifs de nature intergroupe. Afin que les rangs respectifs des individus au sein de la distribution globale soient conservés nous abaissons la valeur du montant transféré entre les individus de sous-groupes distincts à $\delta = 0,75$. Nous distinguons deux cas selon le sous-groupe dans lequel se situe le donneur. Il apparaît, en effet, que lorsque le donneur se trouve dans le sous-groupe dont la moyenne est la plus élevée (soit $\mu(\mathbf{x}^2)$), les inégalités intergroupes diminuent (quelle que soit la méthode de décomposition utilisée) et inversement lorsqu'il est dans le sous-groupe dont la moyenne est la plus faible (ce constat ne vaut que pour le cas de la décomposition additive, une baisse moins importante mais toujours effective est observée avec la décomposition faible).

	Donneur situé dans le sous-groupe 2		Donneur situé dans le sous-groupe 1	
Méthode	(DA)	(DEC1)	(DA)	(DEC1)
CV_{11}^2	0,26	0,26	0,29	0,29
CV_{22}^2	0,20	0,20	0,18	0,18
CV_W^2	0,2278	0,1139	0,2278	0,1139
CV_B^2	0,0040	0,1179	**0,0140**	0,1279
Inégalité totale	0,2318		0,2417	
sous-groupe	1	2	1	2
Moyenne	5,15	5,85	4,85	6,15

Tableau 3.4 – **Inégalités intra- et intergroupes calculées après application d'un transfert progressif entre les sous-groupes G1 et G2.**

Ces quelques résultats viennent renforcer les commentaires précédemment formulés et permettent de mieux se représenter les variations subies par les composantes selon la méthode retenue. Notons que, des conclusions inverses tiennent, lorsque les transferts appliqués sont régressifs ($\delta < 0$).

Dans le paragraphe suivant, nous poursuivons notre étude des mesures faiblement décomposables. Nous mettons en avant une propriété, récemment introduite dans la littérature, afin de capter différents jugements de valeur et de les intégrer dans le procédé d'évaluation des inégalités.

3.3 Une application aux mesures "*unit-consistent*"

Cette Section propose une application de notre axiome de décomposition faible (DEC1) – introduit au paragraphe précédent – au cas des mesures dites *unit-consistent* au sens de Zheng (2005, 2007a, b, c). Compte tenu du fait que l'application de l'axiome (DEC1) ne dépend pas de la propriété d'invariance attribuée à la mesure à laquelle il est destiné, nous l'utilisons pour définir une classe de mesures qui englobe l'ensemble des points de vue politiques (d'extrême gauche à extrême droite). Nous généralisons, ainsi, les travaux de Zheng (2007a) en caractérisant une famille plus large de mesures décomposables et *unit-consistent*. Après avoir brièvement rappelé les enjeux de la propriété d'*unit consistency*, nous proposons une caractérisation de la classe des indicateurs $(\alpha, \delta)-$Gini. Cette famille d'indicateurs constitue une généralisation des indices $\alpha-$Gini car elle intègre l'ensemble des jugements de valeur d'une société.[15] Une illustration numérique vient ensuite compléter notre exposé afin de montrer toute la portée de ces nouvelles mesures.

15. Les mesures $\alpha-$Gini ne reflètent qu'une vision « droitiste » des disparités.

3.3.1 Les enjeux de la propriété d'"*unit consistency*"

Quelle mesure utiliser pour évaluer les disparités au sein d'une population donnée ? Soulevée en 1978 par Fei et Fields, cette question reste toujours d'actualité plus de trente cinq ans plus tard. La littérature répertorie aujourd'hui de nombreuses familles de mesures d'inégalités. Chacune d'elles répond à des critères d'évaluation bien spécifiques et implique le respect d'un certain nombre de propriétés de base, telles que la symétrie, la normalisation, l'invariance par réplication ou encore le principe de transferts de Pigou et Dalton. Des propriétés complémentaires peuvent ensuite être invoquées, néanmoins leur adoption ne fait pas toujours l'unanimité. Au cours de cette section, nous revenons sur un vieux débat souvent évoqué lorsqu'il est question de mesures d'inégalités puisqu'il s'agit de l'emploi controversé des propriétés d'invariance, telles que l'invariance par translation (SI), l'invariance d'échelle (INV), ou autres conditions intermédiaires.

Une distinction s'opère entre les diverses propriétés d'invariance afin d'exprimer implicitement le jugement de valeur qui leur est associé. Une mesure absolue incarne par exemple une préférence prononcée pour une redistribution en faveur des moins bien lotis. Elle est généralement associée à un point de vue politique orienté à gauche. Une mesure relative illustre en revanche de plus faibles préférences pour une redistribution en faveur des plus démunis, elle est alors assimilée à un point de vue de droite [voir Kolm (1976a, 1976b)]. La vision centriste s'exprime quant à elle au travers de plusieurs propriétés d'invariance. Certaines d'entre elles admettent pour limites les cas relatifs ou absolus selon leur construction. La notion de concept d'invariance centriste apparaît pour la première fois dans les travaux de Kolm (1976a). Une mesure est alors considérée comme centriste au sens de Kolm dès lors qu'elle satisfait l'équation suivante :

$$I(\theta(\mathbf{x} - \tau \mathbf{1}_n) + \tau \mathbf{1}_n) = \theta I(\mathbf{x}) \quad \text{avec} \quad -\infty < \tau \leqslant 0 \;\; \text{et} \;\; \theta \in \mathbb{R}. \qquad \text{(CI)}$$

Kolm présente la vision centriste comme une vision à part entière qui véhicule des idées se situant entre les concepts plus usuels. S'il est possible de retrouver le concept d'invariance par translation lorsque $\tau \longrightarrow -\infty$, il est, en revanche, impossible de retomber sur le concept d'invariance d'échelle lorsque $\tau \longrightarrow 0$. Cette propriété d'invariance est reprise et approfondie par Besley et Preston (1988) qui la reformulent de la manière suivante :

$$I(\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{x} + \tau)) = I(\mathbf{x}) \;;$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ peut être interprété comme le montant de croissance par tête [16] et τ une constante.

Parmi les nombreuses propriétés d'invariance, la propriété introduite par Pfingsten (1986, 1988) puis reprise par Bossert et Pfingsten (1990) figure parmi les plus utilisées. Les auteurs insistent sur le caractère intermédiaire joué par le point de vue centriste et le présentent comme un compromis entre les idées de la droite et celles de la gauche. Leur condition d'invariance se décline en deux inéquations qui permettent de rejoindre soit le point de vue de gauche ($\tau = 0$), soit celui de droite ($\tau = 1$) dans les cas limites :

$$I(\mathbf{x} + \lambda(\tau \mathbf{x}) + \mathbf{1}_n(1 - \tau)] = I(\mathbf{x}) \;, \quad \text{avec} \;\; \lambda \in \mathbb{R} \;\; \text{et} \;\; 0 < \tau < 1.$$

Le paramètre τ permet de nuancer le point de vue centriste. Il traduit des penchants plus ou moins prononcés pour la gauche ou pour la droite, que l'on retrouve parfois dans certains partis qui revendiquent pourtant leur position au centre. Zheng (2007c) ainsi que Besley et Preston (1988) reprochent néanmoins à cette règle d'invariance de ne pas définir clairement la transformation

16. Voir Bosmans, Decancq et Decoster (2011) pour plus de détails.

subie par la distribution $\mathbf{x}$ afin que $I(\mathbf{x})$ reste inchangée. L'interprétation du paramètre λ est également sujette à débat.

A partir de 1997, se développe progressivement l'idée qu'une mesure intermédiaire peut rester inchangée au long d'un rayon (de transformations) défini à partir de la distribution initiale. Pour énoncer une telle propriété dite de "*ray-invariance*", Seidl et Pfingsten (1997) s'appuient sur les travaux de Ballano et Ruiz-Castillo (1993) et se concentrent principalement sur la représentation graphique des inégalités. Ainsi, la *ray-invariance* peut s'interpréter comme une moyenne pondérée des lignes d'inégalités relatives et absolues. La formulation la plus couramment rencontrée pour cette propriété est rappelée ci-après :

$$I(\mathbf{x} + \tau[\pi \boldsymbol{v}_{\mathbf{x}} + (1-\pi)\mathbf{1}_n]) = I(\mathbf{x})$$

où $\boldsymbol{v}_{\mathbf{x}}$ représente le vecteur de parts de revenus tel que $\boldsymbol{v}_{\mathbf{x}} = (v_1, \ldots, v_n)$, avec $v_i := \frac{x_i}{X}$, X étant le revenu agrégé $X = \sum_i^n x_i$ et $\pi \in [0,1]$.

Cette expression correspond plus exactement à un cas particulier de mesures *ray-invariant* étudié par Del Rio et Castillo (2000). Cette formulation est généralement préférée à celle avancée par Seidl et Pfingsten (1997) car elle offre l'interprétation économique suivante :[17] l'inégalité reste inchangée le long des rayons construits tels que $\pi 100\%$ de tout surplus de revenu est alloué aux individus en fonction de leur part de revenu dans $\mathbf{x}$ et $(1-\pi)100\%$ de ce surplus est reversé dans des montants absolus égaux. Ce concept d'invariance par rayon est repris quelques années plus tard par Del Rio et Alonso-Villar (2010) afin d'étendre ce critère à davantage de distributions de revenus. Une autre façon de répartir le surplus de revenu est par ailleurs mis en avant par Krtscha (1994) sous l'appellation de "*fair compromise concept*" :

17. Voir Del Rio et Ruiz-Castillo, 2000 p. 228-229

Axiome 3.3.1 – ***Fair Compromise Concept*** –**(FCC).** *Soient deux distributions* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_+$. *La distribution* $\mathbf{y}$ *est un compromis juste de* $\mathbf{x}$ *s'il existe* $\lambda > 0$ *tel que :*

$$\begin{pmatrix} y_1 - \mu(\mathbf{y}) \\ \vdots \\ y_n - \mu(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \mu(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ x_n - \mu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

et,

$$I(\mathbf{x}, n) = I(\mathbf{y}, n) \ . \tag{FCC}$$

Il s'agit d'une règle de répartition des ressources (revenus) supplémentaires entre les différents individus d'une population de telle sorte que les écarts de revenus préexistants entre les individus n'en soient pas affectés. Selon Krtscha (1994), la meilleure façon de répartir une quantité supplémentaire de revenus entre des individus partageant des opinions politiques différentes est de procéder à un arbitrage (neutre) entre la répartition que les individus les plus pauvres (rattachés à une opinion de gauche) et les individus les plus riches (généralement de droite), souhaiteraient se voir remettre. Par cette action d'arbitrage [18] un compromis est ainsi trouvé entre les deux partis. Notons qu'en termes d'interprétation géométrique, cette condition d'invariance ne forme non plus un rayon mais plutôt une parabole, le long de laquelle l'inégalité reste inchangée. A l'aide de ce critère d'invariance, Krtscha introduit une nouvelle classe de mesures intermédiaires dont la structure est très proche de celle du coefficient de variation élevé au carré (relatif) et de la variance (absolu). Cette propriété d'invariance est ensuite reprise et généralisée par Yoshida (2005) dans le cadre des fonctions de bien-être social.

Les points de vue extrêmes s'obtiennent en combinant et en ajustant les conditions d'invariance précédemment évoquées. En dépit de la pluralité des condi-

18. Krtscha (1994) suggère de calculer la moyenne arithmétique (pondérée) des montants des répartitions demandés par les différents partis [voir Krtscha (1994), p. 113 pour détails].

tions d'invariance, elles ne sont pas toutes employées à la même fréquence. Un grand nombre de travaux de recherche tendent à privilégier l'emploi de la condition d'invariance d'échelle. Le principal argument avancé en faveur de cette propriété porte sur sa capacité à laisser la mesure inchangée lorsque la distribution de revenus est multipliée par un même montant ($\lambda > 0$). Des comparaisons entre indicateurs calculés sur des distributions de revenus exprimées en unités monétaires différentes peuvent, ainsi, être directement effectuées. Cette propriété a, donc, tendance à être présentée comme une propriété d'indépendance qui permet de s'affranchir de toute conversion monétaire. Certains auteurs tels que Thomson (2003) ou Marchant (2008) préfèrent néanmoins la présenter comme une simple propriété d'homogénéité. De ce fait, ils estiment que les autres propriétés d'invariance méritent plus de crédit.

Cet engouement pour les mesures relatives se heurte, tout de même, à des critiques. Des auteurs tels que Ravaillon (2003) ou Atkinson et Brandolini (2004, 2010) trouvent injustifiée l'utilisation d'une telle propriété dans une étude des inégalités de revenus globale. De plus, compte tenu de la diversité des opinions politiques dans une société, il est souvent considéré comme restrictif de se limiter à un seul point de vue (généralement celui de droite) pour juger de l'ampleur des inégalités. C'est la raison pour laquelle Zheng (2005, 2007a, b, c) suggère de recourir à une propriété qui ne capture aucun jugement de valeur en particulier : l'"*unit consistency*". Il s'agit, d'une condition ordinale, qui laisse inchangé le classement des distributions, quelle que soit l'unité de mesure dans laquelle les revenus sont exprimés. La critique majeure que Zheng (2005, 2007a, b, c) adresse aux conditions d'invariances usuelles porte sur leur nature cardinale. Partant du principe que les mesures d'inégalités sont ordinales, Zheng (2007a, b, c) considère comme inappropriée l'application d'un concept cardinal pour la détermination de leur structure.

Par définition, la propriété d'*unit consistency* vise à garantir la cohérence d'une mesure d'inégalités. L'appréciation des inégalités de revenus entre deux pays ne doit donc pas être influencée par les unités monétaires. Ainsi, comme l'explique Zheng, si un pays est jugé plus inégalitaire qu'un autre pour une unité monétaire donnée, ce jugement doit rester inchangé quelle que soit l'unité monétaire dans laquelle les revenus sont exprimés. La mesure reste, ainsi, cohérente en unité. Soit $\mathscr{X}_{++} := \bigcup_{n\geqslant 3} \mathbb{R}^n_{++}$ l'ensemble des distributions de revenus strictement positives :

Axiome 3.3.2 – ***Unit consistency*** **–(UC).** *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathscr{X}_{++}$*, si :*

$$I(\mathbf{x}) < I(\mathbf{y}) \quad \textit{alors} \quad I(\theta\mathbf{x}) < I(\theta\mathbf{y}) \ ;$$

avec $\theta \in \mathbb{R}_{++}$.

Dans le même temps, un axiome très proche de celui d'*unit consistency* est suggéré par Zoli[19] (2012) sous le nom de "*weak currency independence*". Soit $\succcurlyeq$ une relation binaire d'(in)égalité telle que $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ signifie que $\mathbf{x}$ est au moins aussi égal que $\mathbf{y}$, alors :

Axiome 3.3.3 – ***Weak Currency Independence*** **–(WCI).** *Pour tout* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_{++}$*, si :*

$$\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y} \quad \textit{alors} \quad \alpha\mathbf{x} \succcurlyeq \alpha\mathbf{y} \quad \textit{avec} \quad \alpha > 0.$$

Ce deuxième énoncé permet de faire ressortir le caractère ordinal de cette propriété. Zoli (2012) précise que toute mesure d'inégalités cohérente avec cette condition (faible) d'indépendance monétaire respecte l'équation fonctionnelle d'homothétie discutée par Aczèl (1987) [Zoli (2012), note de bas de page 28

19. Une première version de cet article date de 2003.

p. 23]. L'invariance d'échelle (SI) constitue un cas particulier d'homothétie, elle est incluse dans les axiomes (UC) ou (WCI). Rappelons que, par définition, la propriété d'*unit consistency* ne représente aucun jugement de valeur en particulier, néanmoins, elle permet de retrouver aisément des concepts usuels tels que l'invariance d'échelle (homogénéité de degré 0) ou dans certains cas particuliers,[20] l'invariance par translation. L'ensemble des concepts précédemment mentionnés ne sont cependant pas tous[21] compatibles avec l'*unit consistency*. Les fondements économiques de ces différents concepts intermédiaires manquent parfois de clarté et certaines des transformations imposées sur la distribution de revenus afin de garantir l'invariance nécessiteraient davantage d'explication. Aussi, lorsqu'il sera question de mesures intermédiaires (ou plus généralement centristes) dans la suite de notre développement, nous ferons désormais référence soit à la propriété de Kolm (1976a), soit à celle de Bossert et Pfingsten (1990), qui figurent parmi les plus utilisées.

La famille des mesures *unit-consistent* comprend l'ensemble des jugements de valeurs présents au sein d'une société. Sous réserve de compatibilité, la structure d'un même indicateur peut ainsi être déclinée selon les différents points de vue adoptés par un décideur politique, comme nous l'expliquons plus en détails à la section suivante.

20. Pour retrouver la propriété d'invariance par translation, il faut que la structure de l'indicateur statistiques permette d'assimiler la transformation à une homothétie.

21. Par exemple, les concepts de Kolm (1976a, b), Bossert et Pfingsten (1990), Del Rio et Alonso-Villar (2010), sont compatibles avec l'axiome (UC). Notons que l'exposé des différentes propriétés d'invariance précédemment proposé n'est pas exhaustif.

3.3.2 Une caractérisation axiomatique des mesures "*unit-consistent*" et faiblement décomposables

Dans cette section, nous proposons une caractérisation axiomatique possible des mesures faiblement décomposables et *unit-consistent*. Nous prenons appui sur les travaux de Zheng (2005, 2007a, b, c) afin de raffiner la structure des mesures faiblement décomposables présentées à la Section 3.2.2. Par définition, l'axiome (DEC1) est compatible avec toutes les conditions d'invariance évoquées précédemment. En choisissant de combiner (DEC1) à (UC), nous obtenons une large famille de mesures d'inégalités qui peuvent refléter l'ensemble des opinions politiques de la société, tout en proposant une analyse des disparités intra- et intergroupes basée sur les comparaisons interpersonnelles de revenus. Pour rappel, la combinaison de l'*unit consistency* (UC) avec la décomposition additive en sous-groupes (DA) de Shorrocks (1980, 1984) conduit Zheng (2005, 2007a) à caractériser une classe de mesures à deux paramètres de l'entropie généralisée $\{I_{\alpha,\beta}(\cdot, n)\}_{n\geqslant 2}$:

$$I_{\alpha,\beta}(\mathbf{x}, n) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} \frac{1}{n\mu(\mathbf{x})^{\beta}} \sum_{i=1}^{n(\mathbf{x})} [x_i^{\alpha} - \mu(\mathbf{x})^{\alpha}] \ , \quad \text{si } \alpha \neq 0, 1 \\ \\ \frac{1}{n\mu(\mathbf{x})^{\beta-1}} \sum_{i=1}^{n(\mathbf{x})} \frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})} \ln \frac{x_i}{\mu(\mathbf{x})} \\ \\ \frac{1}{n\mu(\mathbf{x})^{\beta}} \sum_{i=1}^{n(\mathbf{x})} \ln \frac{\mu(\mathbf{x})}{x_i} \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Selon les valeurs empruntées par les paramètres α et β, cette famille de mesures peut refléter la plupart des points de vue politiques (d'extrême droite à extrême gauche). Zheng (2007a) démontre alors que le seul et unique indicateur absolu (c'est-à-dire, qui incarne une vision de gauche) à être à la fois *unit-consistent* et additivement décomposable en sous-groupes est la variance. Les indicateurs relatifs sont, en revanche, plus répandus au sein de cette nouvelle classe de mesures. On retrouve, notamment, l'indicateur de Theil ainsi que le coefficient de variation élevé au carré, antérieurement identifié par Shorrocks (1980) comme un des membres de la famille de l'entropie généralisée à un paramètre. Une particularité mathématique intéressante de ces indicateurs est qu'ils sont tous homogènes de degrés $\alpha - \beta$. Zheng (2005, 2007a) démontre, en effet, que l'homogénéité est une conséquence directe de la conjonction de la décomposition additive avec l'*unit consistency*.

Nous montrons qu'en relâchant l'hypothèse de décomposition additive au profit d'une décomposition plus faible, il est possible de caractériser une famille de mesures faiblement décomposables et *unit-consistent* qui sont également homogènes. Nous introduisons, ainsi, une nouvelle classe de mesures à deux paramètres dont la structure mathématique est très proche de celle des $\alpha-$Gini, introduits au Chapitre 1. Ces mesures se notent $\{G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)\}_{n\geqslant 2}$. Parmi les indicateurs de cette nouvelle famille, nous identifions une généralisation de la différence moyenne de Gini (GMD) que nous qualifions de *différence moyenne de* $\alpha-$*Gini*. Ces mesures constituent un ensemble d'indicateurs absolus qui satisfont à la fois une propriété de décomposition en sous-groupes ainsi que la propriété d'*unit consistency*. Elles sont, également, homogènes de degré α. De plus, lorsque $\alpha = 2$ l'indicateur correspond à une transformation linéaire de la variance. La variance n'est donc plus le seul indicateur à pouvoir être décomposé selon plusieurs sous-groupes tout en étant *unit-consistent* comme le suggère Zheng (2007a).

Le coefficient de variation élevé au carré ainsi que l'indice de Gini standard étant par définition des mesures relatives qui satisfont la décomposition faible, elles sont, également, incluses dans notre famille de mesures. La famille des mesures $\{G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)\}_{n\geqslant 2}$ peut, alors, être envisagée comme une classe hybride de mesures d'inégalités puisqu'elle comprend aussi bien des mesures dépendant du rang (comme l'indice de Gini standard) que des mesures additivement séparables (telles que le coefficient de variation élevé au carré). Notre famille de mesures à deux paramètres ne peut néanmoins pas être considérée comme une famille de mesures purement dépendant du rang. Ce qualificatif est réservé à des familles de mesures bien spécifiques telles que les $\mathcal{S}-$Ginis proposés par Donaldson et Weymark (1980) ou les $\mathcal{P}-$Ginis introduits par Gajdos (2002) qui ne font pas partie de notre famille d'indicateurs.

Pour réaliser notre caractérisation, nous considérons toujours une population de taille $n \geqslant 2$. Nous travaillons avec un vecteur de revenus $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\mathbb{R}_+^n$ [resp. $\mathbb{R}_{++}^n$] est l'ensemble des distributions de revenus non négatives [resp. strictement positives]. Cette distribution $\mathbf{x}$ répond aux mêmes exigences que celles avancées à la Section 3.2.2, à savoir : la distribution peut être concaténée un nombre k de fois de telle sorte que : $\mathbf{x}^{[k]} = (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{k \text{ fois}}) \in \mathbb{R}_+^{kn}$; la distribution peut être subdivisée en G sous-groupes exhaustifs et exclusifs tels que $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, \ldots, \mathbf{x}^G) \in \mathbb{R}_+^n$. Chaque vecteur de revenus $\mathbf{x}^g \in \mathbb{R}_+^{n_g}$ est de taille n_g $\forall g \in \{1, \ldots, G\}$ avec $G \geqslant 2$, donc, par définition, $n = n_1 + \ldots + n_G$. Les notations usuelles sont employées pour la moyenne arithmétique : $\mu(\mathbf{x}) \equiv \mu$ lorsque cette moyenne est calculée sur la distribution globale $\mathbf{x}$, $\mu_g(\mathbf{x}) \equiv \mu_g$ lorsqu'elle ne concerne que le sous-groupe g et enfin $\mu(x_i, x_j) \equiv \mu_{ij}$ lorsqu'elle représente la moyenne entre les revenus des individus i et j. Ces moyennes sont supposées **strictement positives** afin d'éviter les cas dégénérés.

En substituant à l'axiome de décomposition additive (DA) notre axiome de décomposition faible (DEC1), nous trouvons un résultat semblable à celui de Zheng (2007a, p. 103) : tout indice d'inégalités satisfaisant une méthode de décomposition est *unit-consistent* si et seulement s'il est homogène de degré α.

Lemme 3.3.1 *Si un indice d'inégalités* $I(\mathbf{x}, n)$ *satisfait* (CN), (NM), (DEC1) *et* (UC), *alors :*

$$I(\gamma\mathbf{x}, n) = \gamma^{\alpha} I(\mathbf{x}, n), \ \forall\gamma \in \mathbb{R}_{++}, \ \forall\alpha \in \mathbb{R}.$$

Preuve.

<u>ÉTAPE 1 :</u> Linéarité de f. Considérons une distribution de revenus $\mathbf{x}$ de taille $n = 2$, telle que $\mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+$. Soit $I(\mathbf{x}, n)$, une mesure d'inégalités continue (CN) et faiblement décomposable (DEC1). Par définition, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) &= \alpha(n_1, n, x_1 + x_1, Y) I(x_1, x_1, 2) + \alpha(n_2, n, x_2 + x_2, Y) I(x_2, x_2, 2) \\ &\quad + \beta(2, n, x_1 + x_2, Y) I(x_1, x_2, 2) + \beta(2, n, x_2 + x_1, Y) I(x_2, x_1, 2) \\ &\overset{(\mathrm{NM})}{=} \beta(2, n, x_1 + x_2, Y) I(x_1, x_2, 2) + \beta(2, n, x_2 + x_1, Y) I(x_2, x_1, 2). \end{aligned}$$

Supposons que l'ensemble des revenus de la distribution $\mathbf{x}$ soient multipliés par un réel $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$ tel que :

$$I(\gamma\mathbf{x}, n) = \beta(2, n, \gamma(x_1+x_2), \gamma Y) I(\gamma x_1, \gamma x_2, 2) + \beta(2, n, \gamma(x_2+x_1), \gamma Y) I(\gamma x_2, \gamma x_1, 2).$$

D'après Zheng (2007, Proposition 1), les axiomes (UC) et (CN), nous permettent de définir une fonction continue (et croissante) $f(\gamma, \cdot)$ telle que :

$$\begin{aligned} & f[\gamma, \beta(2, n, x_1 + x_2, Y) I(x_1, x_2, 2) + \beta(2, n, x_2 + x_1, Y) I(x_2, x_1, 2)] \\ &= \beta(2, n, \gamma(x_1 + x_2), \gamma Y) f[\gamma, I(x_1, x_2, 2)] + \beta(2, n, \gamma(x_2 + x_1), \gamma Y) f[\gamma, I(x_2, x_1, 2)]. \end{aligned}$$

Posons $f_\gamma := f[\gamma, \cdot]$, $\beta_{12} := \beta(2, n, x_1 + x_2, Y)$, $\beta_{\gamma,12} := \beta(2, n, \gamma(x_1 + x_2), \gamma Y)$ et $I(x_1, x_2, 2) := c_{12}$, l'expression précédente devient alors :

$$f_\gamma[\beta_{12} c_{12} + \beta_{21} c_{21}] = \beta_{\gamma,12} f_\gamma[c_{12}] + \beta_{\gamma,21} f_\gamma[c_{21}], \tag{3}$$

pour tout $c_{12}, c_{21} \in \mathbb{R}_{++}$. Le fait de réduire la taille de la population à $n = 2$ n'est pas restrictif, cela nous permet de vérifier dans un premier temps l'existence d'une solution liée à f. D'après Aczél (1966, Théorème 1, p. 66), (CN) implique l'existence d'une solution à l'équation fonctionnelle (3) seulement si :

$$\beta_{12} := \beta_{\gamma,12} \ ; \ \beta_{21} = \beta_{\gamma,21}.$$

Cherchons dans un second temps la forme de f sans restreindre la taille de la population et en utilisant la condition d'existence ci-dessus, valable quel que soit le couple (x_i, x_j) par (SM) :

$$\beta(2, n, x_i + x_j, Y) = \beta(2, n, \gamma(x_i + x_j), \gamma Y).$$

Considérons une distribution de revenus $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$ de taille $n \geqslant 2$. Supposons que la population est décomposable en $G = n$ sous-groupes, alors, d'après (DEC1') et (NM) :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}, n) = {} & \beta(2, n, x_1 + x_2, Y) I(x_1, x_2, 2) + \beta(2, n, x_2 + x_1, Y) I(x_2, x_1, 2) \\ & + \cdots \\ & + \ \beta(2, n, x_{n-1} + x_n, Y) I(x_{n-1}, x_n, 2) + \beta(2, n, x_n + x_{n-1}, Y) I(x_n, x_{n-1}, 2) \\ = {} & \sum_{i,j}^{n} \beta(2, n, x_i + x_j, Y) I(x_i, x_j, 2), \end{aligned}$$

où les poids $\beta(2, n, x_i + x_j, Y)$ sont uniques car il n'existe qu'une seule décomposition telle que $G = n$ sous-groupes. En reprenant les notations précédemment empruntées, nous faisons apparaître que :

$$f_\gamma[I(\mathbf{x}, n)] = \sum_{i,j}^{n} \beta(2, n, \gamma(x_i + x_j), \gamma Y) f_\gamma[I(x_i, x_j, 2)]. \tag{4}$$

D'où :

$$f_\gamma \left[\sum_{i,j}^{n} \beta(2, n, x_i + x_j, Y) I(x_i, x_j, 2) \right] = \sum_{i,j}^{n} \beta(2, n, x_i + x_j, Y) f_\gamma[I(x_i, x_j, 2). \tag{5}$$

L'équation (5) est une généralisation de la forme fonctionnelle de Cauchy

$$f(z+t) = f(z) + f(t) \tag{6}$$

proposée par Aczèl et Dhombres (2008). En effet, toute fonction f définie sous la forme (5) se réécrit sous la forme (6), par conséquent, f est linéaire pour tout $n \geqslant 1$, telle que : [22]

$$f(t) = a \cdot t,$$

avec $a \neq 0$, une constante. Finalement, en substituant ce résultat dans (4), nous obtenons :

$$f[\gamma, \beta(2,n,x_1+x_2,Y)I(x_1,x_2,2) + \cdots + \beta(2,n,x_{n-1}+x_n,Y)I(x_{n-1},x_n,2)] \tag{S1}$$
$$= a(\gamma)\left(\beta(2,n,x_1+x_2,Y)I(x_1,x_2,2) + \cdots + \beta(2,n,x_{n-1}+x_n,Y)I(x_{n-1},x_n,2)\right).$$

<u>ÉTAPE 2 :</u> homogénéité de I. En utilisant (S1), nous faisons apparaître que :

$$I(\gamma\mathbf{x}, n) = a(\gamma)I(\mathbf{x}, n),$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ et $a(\cdot)$ une fonction permettant de garantir la positivité de la mesure d'inégalités I, telle que pour tout produit de facteurs $\gamma,\vartheta \in \mathbb{R}_{++}$: $a(\gamma\varsigma) = a(\gamma)a(\varsigma)$; qui a pour solution : $a(\gamma) = \gamma^\alpha$ [voir Zheng (2007a), p. 105]. Finalement, nous déduisons que :

$$I(\gamma\mathbf{x}, n) = \gamma^\alpha I(\mathbf{x}, n),$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ et α une constante réelle. $\square$

Ce premier résultat est attractif et offre des facilités calculatoires intéressantes. L'homogénéité de degré α n'est cependant pas le seul résultat que nous pouvons faire ressortir de la combinaison de (UC) et (DEC1). L'*unit consistency*

22. L'unicité des poids nous permet de définir une base de Hamel (1905) et de démontrer ainsi la linéarité de f [voir Aczèl et Dhombres (2008), p. 18-20].

nous permet avant tout de préciser la structure des fonctions de pondérations obtenues à la Proposition 3.2.1 de la Section 3.2.2.

Lemme 3.3.2 *Une mesure d'inégalités* $I(\mathbf{x}, n)$ *satisfait* (CN)*,* (NM)*,* (SM)*,* (DEC1)*,* (UC) *et* (PP)*, avec* $c(1) = 1$*, si et seulement si :*

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{c(\mu_{ij})}{c(\mu)} I(x_i, x_j, 2),$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$*,* $\frac{c(\mu_{ij})}{c(\mu)} = \left(\frac{\mu_{ij}}{\mu}\right)^\delta$ *et* $\delta \in \mathbb{R}$*.*

Preuve.
D'après la Proposition 3.2.1, toute mesure satisfaisant (CN), (NM), (SM), (DEC1) et (PP) peut s'écrire telle que :

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2 \cdot c(\mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c(\mu_{ij}) I(x_i, x_j, 2). \tag{U1}$$

Soit $\gamma \in \mathbb{R}_{++}$, d'après (UC) nous avons :

$$I(\gamma \mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2 \cdot c(\gamma\mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c(\gamma\mu_{ij}) I(\gamma x_i, \gamma x_j, 2) \ ,$$

ce qui est équivalent à :

$$\gamma^\alpha I(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2 \cdot c(\mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c(\mu_{ij}) \cdot \gamma^\alpha \cdot I(x_i, x_j, 2). \tag{U2}$$

En introduisant (U1) dans (U2) il vient :

$$\frac{2}{n^2 \cdot c(\gamma\mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c(\gamma\mu_{ij}) \cdot \gamma^\alpha \cdot I(x_i, x_j, 2) = \frac{2}{n^2 \cdot c(\mu)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c(\mu_{ij}) \cdot \gamma^\alpha \cdot I(x_i, x_j, 2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{c(\gamma\mu_{ij})}{c(\gamma\mu)} - \frac{c(\mu_{ij})}{c(\mu)} \right] I(x_i, x_j, 2) = 0$$

En imposant $x_i \neq x_j$ afin de garantir $I(x_i, x_j, 2) > 0$, nous pouvons nous concentrer sur les termes entre crochets et déduire que :

$$c(\mu_{ij}) \cdot c(\gamma\mu) = c(\gamma\mu_{ij}) \cdot c(\mu)$$

Posons $\gamma = 1/\mu$ avec $\mu > 0$, tel que :

$$c(\mu_{ij}) \cdot c(1) = c(\mu_{ij}/\mu) \cdot c(\mu).$$

Par définition, $c(1) = 1$, nous obtenons finalement :

$$c(\mu_{ij}/\mu \cdot \mu) = c(\mu_{ij}/\mu) \cdot c(\mu).$$

Cette dernière expression correspond à une équation fonctionnelle de Cauchy : $c(a) \cdot c(b) = c(ab)$, dont la solution est [*voir* Aczél (1966), p.39] :

$$c(a) = a^{\delta}, \quad \text{pour un } \delta \text{ constant.}$$

Par conséquent, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ et $\delta \in \mathbb{R}$:

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mu_{ij}}{\mu} \right)^{\delta} I(x_i, x_j, 2).$$

□

A partir de cette dernière expression, nous pouvons définir la classe des mesures absolues faiblement décomposables, dont la structure reste cohérente avec l'axiome d'*unit consistency.* Nous suivons le même raisonnement que celui suggéré par Zheng (2005) en supposant qu'il existe une « relation de passage » entre les indicateurs relatifs et absolus à condition qu'ils soient cohérents avec (UC). La structure des mesures absolues peut, ainsi, être déduite à partir de celle des mesures relatives (ou réciproquement). Pour rappel, un indicateur est dit absolu s'il est invariant par translation.

Axiome 3.3.4 – Invariance par translation –(INV). *Pour tout* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *une mesure d'inégalités est absolue si,*

$$J(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}^n, n) = J(\mathbf{x}, n), \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++} \ . \tag{INV}$$

La relation qui lie une mesure relative (invariante d'échelle) $I(\mathbf{x}, n)$ à une mesure absolue $J(\mathbf{x}, n)$ est la suivante :

$$I(\mathbf{x}, n) = \mu^{-\delta} \cdot J(\mathbf{x}, n).$$

La caractérisation de $J(\mathbf{x}, n)$ mène à celle de $I(\mathbf{x}, n)$ et inversement. Zheng (2005, 2007a) montre que les mesures relatives sont toujours *unit consistent* compte tenu du fait qu'elles sont homogènes de degré 0. Les mesures absolues, en revanche, ne sont pas toujours *unit consistent* (ou plus généralement homogènes). Nous pouvons, par exemple, mentionner le pseudo-indice de Kolm, dont la formulation compatible avec notre axiome (DEC1) se présente comme suit :

$$K(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{2n^2} \left[\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left\{ e^{\alpha |x_j - x_i|} - 1 \right\} \right], \quad \text{avec } \alpha \neq 0.$$

Cet indicateur est bien faiblement décomposable et invariant par translation, néanmoins il n'est pas *unit consistent*. De la même façon, il existe des indicateurs qui respectent (DEC1) et (UC) mais dont la structure n'est pas cohérente avec (INV). C'est, notamment, le cas des indicateurs suivants :

$$I_1(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i^\alpha - x_j^\alpha|, \quad \text{avec} \quad \alpha \neq 1 \ ;$$

ou

$$I_2(\mathbf{x}, n) = \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^\alpha + \left(\frac{x_i + x_j}{2} \right)^\alpha .$$

Ces indicateurs sont bien homogènes de degré $\alpha \neq 0$ mais ils ne sont pas invariants par translation. Ces quelques exemples nous permettent de constater que les axiomes (INV) et (UC) sont indépendants. [23] Ces axiomes peuvent donc être invoqués simultanément au cours du processus de caractérisation visant à définir la classe des mesures absolues faiblement décomposables, dont la structure reste cohérente avec la propriété d'*unit consistency*.

Proposition 3.3.1 *Une mesure d'inégalités* $I(\mathbf{x}, n)$ *satisfait* (CN), (NM), (SM), (DEC1), (UC), (PP) *et* (INV), *si et seulement si :*

$$J(\mathbf{x}, n) = c \left(\frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^{\alpha} \right),$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *et* $c > 0$ *une constante.*

Preuve.
Supposons que $I(\mathbf{x}, n)$ respecte (CN), (NM), (SM), (DEC1), (UC) et (PP). D'après le Lemme 3.3.2, nous savons que :

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mu_{ij}}{\mu} \right)^{\delta} I(x_i, x_j, 2). \tag{U3}$$

La relation entre les mesures absolues et relatives qui sont *unit-consistent* est telle que :

$$I(\mathbf{x}, n) = \mu^{-\delta} \cdot J(\mathbf{x}, n).$$

Nous pouvons, donc, écrire que : $I(x_i, x_j, 2) = \mu_{ij}^{-\delta} \cdot J(x_i, x_j, 2)$. Ainsi en incorporant cette relation dans l'équation (U3), nous obtenons :

$$\mu^{-\delta} \cdot J(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\mu_{ij}}{\mu} \right)^{\delta} \mu_{ij}^{-\delta} \cdot J(x_i, x_j, 2).$$

Soit :

$$J(\mathbf{x}, n) = \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} J(x_i, x_j, 2).$$

23. Dans un cas particulier d'homogénéité de degré 0, (UC) (ou plus exactement (SI)) et (INV) sont disjoints.

Notons que $J(x_i, x_j, 2)$ hérite de la propriété d'invariance par translation au même titre que $J(\mathbf{x}, n)$. Ainsi, en posant $\varepsilon := -x_j$, il vient :

$$J(x_i, x_j, 2) = J(x_i - x_j, 0, 2).$$

D'après le Lemme 3.3.1, $J(\cdot)$ est homogène de degré α avec $\alpha \neq 0$, auquel cas la mesure serait relative. La solution la plus générale des fonctions $f(x, y)$ homogènes de degré α lorsque $y = 0$ est alors : $c \cdot |x|^\alpha$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$, [voir Aczél (1966), p. 305]. Donc, en considérant $c > 0$ afin d'obtenir une mesure d'inégalités bien définie, nous pouvons finalement écrire que :

$$J(\mathbf{x}, n) = c \left(\frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^\alpha \right), \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \; c > 0.$$

$\square$

Maintenant que la classe des mesures absolues faiblement décomposables et unit-consistent est caractérisée, nous nous intéressons aux mesures relatives.

Axiome 3.3.5 – Invariance d'échelle –(SI). *Une mesure d'inégalités $I(\mathbf{x}, n)$ est relative si,*

$$I(\lambda \mathbf{x}, n) = I(\mathbf{x}, n), \; \forall \lambda \in \mathbb{R}_{++} \; . \tag{SI}$$

Cette propriété n'est pas sans rappeler l'énoncé de l'*unit consistency.* Compte tenu de ce qui précède, nous utilisons le pendant de la relation mise en avant entre $J(\mathbf{x}, n)$ et $I(\mathbf{x}, n)$, à savoir :

$$I(\mathbf{x}, n) = \frac{J(\mathbf{x}, n)}{\mu^\delta},$$

afin de caractériser l'ensemble de mesures relatives correspondantes, qui sont également faiblement décomposables.

Proposition 3.3.2 *Une mesure d'inégalités relative* $I(\mathbf{x}, n)$ *satisfait* (CN), (NM), (SM), (DEC1), (UC) *et* (PP), *si :*

$$I(\mathbf{x}, n) = c\left(\frac{2}{n^2 \cdot \mu^{\alpha}(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^{\alpha}\right),$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'avantage de cette dernière expression est qu'elle ne se limite pas aux mesures homogènes de degré 0, elle peut être adaptée de manière à exprimer des points de vue plus extrêmes. Il suffit, pour cela, d'ajuster les valeurs des paramètres α et δ. L'ensemble des points de vues politiques peuvent ainsi être incarnés par une seule et même famille de mesures, que nous notons $\{G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n)\}_{n \geqslant 2}$, construite sur la base d'une structure commune.

Corollaire 3.3.1 *Une classe de mesures d'inégalités respectant* (CN), (NM), (SM), (DEC1), (UC), (PP) *inclut l'ensemble des points de vues d'extrême gauche à extrême droite si elle est de la forme :*

$$G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n) = \frac{2 \cdot c}{n^2 \cdot \mu^{\delta}(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^{\alpha}, \qquad ((\alpha, \delta)\text{−Gini})$$

où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ *et* $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$.

D'un point de vue normatif, la famille $G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n)$ comprend différentes catégories de mesures d'inégalités. Les paramètres α et δ introduits dans la structure de l'indicateur sont assimilés aux préférences d'un décideur politique. Leurs valeurs sont déterminantes pour l'évaluation des disparités. En faisant varier leurs valeurs, nous obtenons, aussi bien, des indicateurs (absolus ou relatifs) qui appartiennent à la famille de l'entropie généralisée, que des indicateurs de la famille des mesures dépendant du rang, tels que l'indice de Gini (absolu ou relatif). Tout dépend du point de vue politique pris en compte lors du calcul des inégalités.

• **Point de vue de gauche** : Au sens de Kolm (1976a), ce point de vue est inclus dans la mesure d'inégalités lorsque $I(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}_n, n) = I(\mathbf{x}, n)$, pour tout $\varepsilon > 0$. Cette condition est remplie si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\delta = 0$, auquel cas nous désignons la sous-famille de mesures d'inégalités absolues et faiblement décomposables par $\{G_{\alpha,0}(\cdot, n)\}_{n \geqslant 2}$. Cette sous-famille inclut la variance ainsi que toute autre mesure cohérente avec la notion d'invariance par translation. Si nous imposons, par exemple, que $c = 1/2$, nous reconnaissons une extension de la différence moyenne de Gini (GMD) dont la formulation correspond à :

$$G_{\alpha,0}(\mathbf{x}, n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^{\alpha}}{n^2}.$$

Nous qualifions cette sous-famille de mesures de différences moyennes de $\alpha-$Gini. Il est à noter que cette caractérisation ne fait pas appel au principe de transferts de Pigou et Dalton (PD). Nous savons néanmoins d'après les travaux de Chakravarty *et al.* (2013) que la classe des différences moyennes de $\alpha-$Gini satisfait un tel principe de transferts lorsque $\alpha > 0$.

• **Point de vue centriste ou intermédiaire** : La sous-famille de mesures centristes incluse dans $\{G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)\}_{n \geqslant 2}$ peut-être dérivée en accord avec la propriété centriste (CI) dite "*centrist inequality concept*" introduite par Kolm (1976a, 1976b). Rappelons qu'une mesure d'inégalités $I(\mathbf{x}, n)$ représente la vision centriste au sens de Kolm si : $I(\theta(\mathbf{x} - \tau \mathbf{1}_n) + \tau \mathbf{1}_n, n) = \theta I(\mathbf{x}, n)$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $-\infty < \tau \leqslant 0$. Cette condition (CI) est satisfaite[24] lorsque $\delta = \alpha - 1$ et $\tau = 0$.

$$G_{\alpha,\alpha-1}(\mathbf{x}, n) = c \left(\frac{2}{n^2 \cdot \mu(\mathbf{x})^{\alpha-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|^{\alpha} \right) .$$

24. Les valeurs de θ et τ pour lesquelles cette condition est satisfaite ont été vérifiées à l'aide du logiciel Gauss. Nous laissons de côté le cas trivial où $\theta = 1$ qui n'implique aucune transformation des revenus.

Dans le cas particulier où $\alpha = 1$ et $\delta = 0$, une telle paramétrisation correspond alors à l'ensemble des indicateurs proportionnels à la différence moyenne de Gini (GMD) qui, dans certains cas limites, illustre également une vision centriste :

$$G_{1,0}(\mathbf{x}, n) = c\left(\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right).$$

Une autre façon d'appréhender le point de vue centriste, consiste à recourir à la définition de Bossert et Pfingsten (1990) qui préfèrent le qualifier de point de vue *intermédiaire* (INT). Une mesure d'inégalités sera considérée comme représentative d'un point de vue intermédiaire, si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+$ tel que $\mathbf{x} \neq \varepsilon\mathbf{1}_n$: $I(\mathbf{x}, n) < I(\theta\mathbf{x}, n)$ pour tout $\theta > 1$ et $I(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{1}_n, n) < I(\mathbf{x}, n)$ avec $\varepsilon > 0$. La condition intermédiaire (INT) est vérifiée par notre famille de mesures lorsque $\alpha > \delta$ tel que $\delta > 0$. En limitant les valeurs de nos paramètres à $\alpha = 2$ et $0 < \delta < 2$ nous obtenons une généralisation des mesures de Krtscha (1994) telle que :

$$G_{2,\delta}(\mathbf{x}, n) = c\left(\frac{2}{n^2 \cdot \mu(\mathbf{x})^\delta}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|^2\right) \;;$$

que l'on peut également présenter sous sa forme plus traditionnelle :

$$I_{2,\delta}(\mathbf{x}, n) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu(\mathbf{x}))^2}{n[\mu(\mathbf{x})]^\delta}.$$

Il est intéressant de noter que l'indicateur centriste $G_{1,1}(\mathbf{x}, n)$ ne satisfait pas la condition intermédiaire (INT) avancée par Bosser et Pfingsten (1990). En effet, compte tenu de la structure particulière de cet indicateur, nous ne validons qu'une seule des deux contraintes imposées par (INT). Car si nous avons bien $G_{1,0}(\mathbf{x}, n) < G_{1,0}(\theta\mathbf{x}, n)$ pour tout $\theta > 1$, nous constatons en revanche que $G_{1,0}(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{1}_n, n) = G_{1,0}(\mathbf{x}, n)$ puisque la différence moyenne de Gini est avant tout une mesure représentative d'un point de vue orienté à gauche. Cet indicateur illustre, donc, des points de vue variables[25] selon la distribution de

25. Ce concept de "*variable view*" est également présent dans l'article de Zheng (2007a).

revenus considérée.

• **Point de vue de droite** : Ce point est intégré à la mesure d'inégalités lorsque l'invariance d'échelle est constatée, c'est-à-dire, lorsque $I(\lambda\mathbf{x}, n) = I(\mathbf{x}, n)$ for $\lambda > 0$. Le respect de cette condition nécessite que $\alpha = \delta$. L'ensemble des mesures $\{G_{\alpha,\alpha}(\cdot, n)\}_{n\geqslant 2}$ constitue une sous-famille de mesures relatives faiblement décomposables. Nous identifions au sein de cette sous-famille, une généralisation des indices de Gini connue pour respecter le principe des transferts de Pigou et Dalton, dès lors que $\alpha \geqslant 1$ (voir Ebert (2010) pour une preuve formelle) :

$$G_{\alpha,\alpha}(\mathbf{x}, n) = c\left(\frac{2}{n^2 \cdot \mu(\mathbf{x})^\alpha}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|^\alpha\right).$$

• **Point de vue d'extrême gauche** : Les mesures d'extrême gauche, sont, par définition, sensibles aux changements linéaires qui peuvent affecter les revenus. Une mesure d'inégalités incarnant un point de vue d'extrême gauche tend à augmenter si un incrément $\varepsilon > 0$ est ajouté au revenu de chaque individu, soit : $I(\mathbf{x} + \varepsilon\mathbf{1}_n, n) > I(\mathbf{x}, n)$. Cette tendance à la hausse à la suite d'une telle transformation des revenus individuels est observée sur l'ensemble des indicateurs de la famille $\{G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)\}_{n\geqslant 2}$ pour lesquels $\delta < 0$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

• **Point de vue d'extrême droite** : Ce dernier point de vue va plutôt encourager la réduction des inégalités en faveur des individus les mieux lotis. Ce qui se traduit en terme de mesure d'inégalités par la condition suivante : $I(\mathbf{x}, n) > I(\theta\mathbf{x}, n)$ pour tout $\theta > 1$. Les indicateurs à deux paramètres en accord avec ce principe sont tels que $\delta > \alpha$ avec $\delta > 0$.

Finalement, l'ensemble des points de vue représentés par notre famille de mesures à 2 paramètres $(\alpha, \delta)-$Gini est synthétisé dans le graphique ci-après.

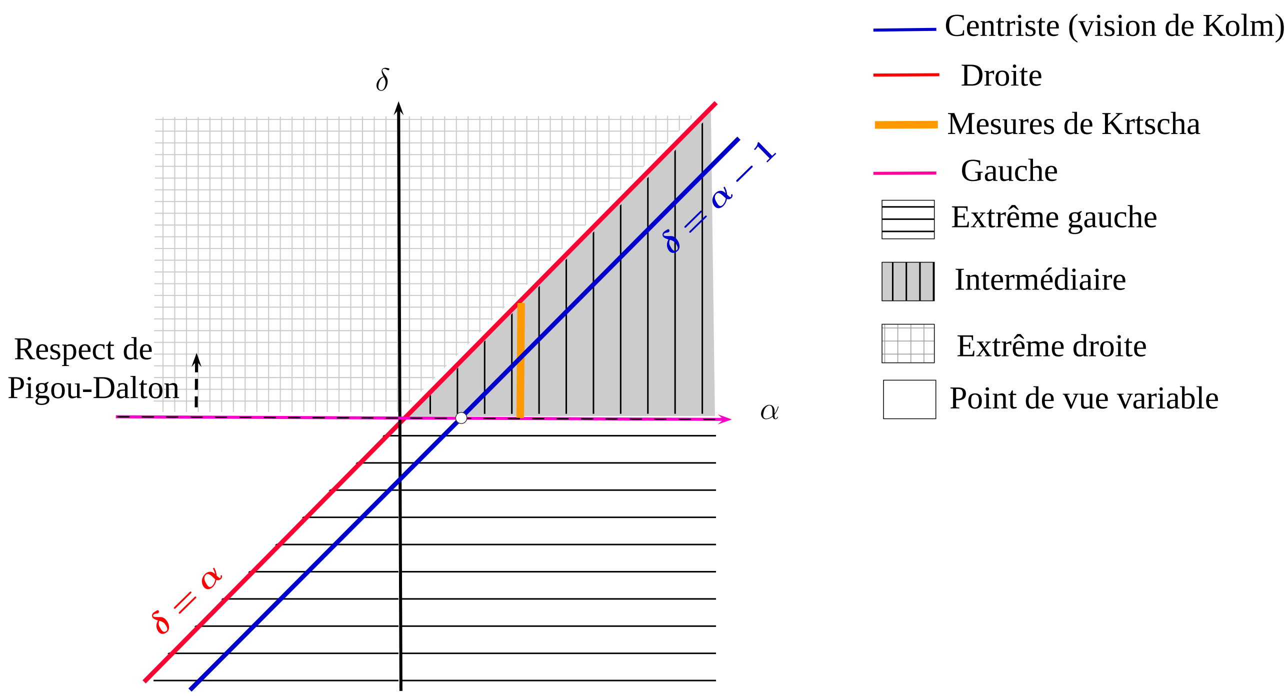

Figure 3.2. **Points de vue d'extrême gauche à extrême droite**

Le fait de pouvoir intégrer différents jugements de valeurs lors de l'évaluation des disparités de revenus permet d'enrichir et d'étayer les interprétations des applications empiriques. En reprenant la même base de données que celle utilisée à la Section 1.2.3, nous montrons au paragraphe suivant, que selon le point de vue politique adopté, les inégalités entre les hommes et les femmes peuvent paraître plus ou moins nuancées.

3.3.3 Une illustration des différentes mesures

Dans ce paragraphe, nous proposons une nouvelle illustration numérique construite à partir de l'enquête « Budget des familles 2005-2006 » présentée au Chapitre 1 (*cf.* Section 1.2.3). Nous travaillons avec un échantillon de 14 281 individus âgés de 18 à 65 ans au 1er janvier 2005 (conformément au processus de sélection des données précédemment décrit). Comme cela a pu être mentionné, différentes interprétations peuvent être prêtées à la propriété d'*unit consistency*. A défaut de pouvoir toutes les explorer, nous nous focalisons sur les effets conjoints de la décomposition faible et de l'*unit consistency*. Une telle alliance permet notamment de capter différents jugements de valeurs pour une même classe de mesures. Ces jugements de valeurs peuvent être associés aux diverses idéologies politiques pour décrire l'opinion publique en France.

Cinq de ces idéologies sont envisagées au cours de cette illustration afin de fournir une analyse détaillée des inégalités de revenus existantes en France en 2005. Ces différentes idéologies sont représentées par 6 indicateurs de la famille des (α, δ)–Gini. Les valeurs des paramètres α et δ représentatifs des préférences du décideur politique sont fixées de manière exogène de manière à ce qu'elles appartiennent à l'intervalle $[-1,5\,; 4]$. Compte tenu de la structure spécifique des indicateurs (α, δ)–Gini, nous choisissons d'appliquer la décomposition sur deux niveaux de partitions afin que l'impact des variations de valeurs, opérées sur les paramètres α et δ, soit plus nettement visible. Les diverses mesures soumises au procédé de décomposition sont les suivantes :

Valeurs de α & δ	$\alpha = 2,5$ $\delta = 0$	$\alpha = 1$ $\delta = 1$
Formulation générale	$G^{2,5,0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lvert x_i - x_j\rvert^{2,5}}{2n^2}$	$G^{1,1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lvert x_i - x_j\rvert}{2n^2\mu}$
Orientation politique / Concept	Gauche absolu	Droite relatif

Tableau 3.5 – **Concepts usuels**

Valeurs de α & δ	$\alpha = 2$ $\delta = 1$	$\alpha = 2$ $\delta = 1,8$
Formulation générale	$G^{2,1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lvert x_i - x_j\rvert^{2}}{2n^2\mu}$	$G^{2,1,8} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lvert x_i - x_j\rvert^{2}}{2n^2\mu^{1,8}}$
Orientation politique / Concept	Centre [Kolm]	Centre intermédiaire

Tableau 3.6 – **Mesures *centristes***

Valeurs de α & δ	$\alpha = 3$ $\delta = 4$	$\alpha = 4$ $\delta = -1,5$
Formulation générale	$G^{3,4} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lvert x_i - x_j\rvert^{3}}{2n^2\mu^{4}}$	$G^{4,-1,5} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lvert x_i - x_j\rvert^{4}}{2n^2\mu^{-1,5}}$
Orientation politique / Concept	Extrême droite	Extrême gauche

Tableau 3.7 – **Mesures extrêmes**

Nous distinguons deux mesures pour traduire la vision « *centriste* ». La notion de mesure intermédiaire introduite par Bossert et Pfingsten (1990) incarne l'idée d'un compromis entre la mesure de droite et celle de gauche (ou plus généralement entre la mesure relative et la mesure absolue). La notion de mesure *centriste* proposée par Kolm (1976) affirme une position plus marquée au centre puisqu'en aucun cas elle ne peut tendre vers une vision de droite (forme relative), lorsque les préférences du décideur sont amenées à évoluer. Bien que rien dans la définition d'un parti politique ne nous permette de déduire l'intensité de l'aversion pour l'inégalité d'un partisan de cette opinion, nous supposons que la sensibilité d'un décideur est plus forte aux extrêmes.

Nous effectuons une décomposition sur deux niveaux de partitionnement. Sur le premier niveau nous considérons à nouveau les disparités de revenus entre les hommes et les femmes. Puis, nous nous intéressons aux écarts de revenus imputables à un nouveau critère, tout aussi significatif que celui de l'âge précédemment utilisé, puisqu'il s'agit du dernier diplôme obtenu par les hommes et les femmes de l'échantillon. Car si le critère de l'âge nous a permis de déceler et d'expliquer une part importante des disparités intergroupes présentes au sein de l'échantillon, la prise en considération du dernier diplôme obtenu semble pertinente pour approfondir notre analyse.

Autrefois réservée aux élites, l'éducation connaît un essor considérable en France au fil des années et des gouvernements. C'est notamment grâce aux interventions des gouvernements que l'École gratuite et laïque (lois Ferry 1881-1882) telle que nous la connaissons aujourd'hui, existe. Officiellement l'instruction publique fait son entrée dans les textes de lois à partir de 1791. Mais l'idée d'inculquer des règles de savoir-vivre et de transmettre des savoir-faire, ou plus généralement des connaissances, aux nouvelles générations fait depuis toujours partie de la société française. Une distinction s'opère néanmoins selon le sexe des individus et seuls les garçons sont, dans un premier temps, autorisés à bénéficier d'une éducation. Des écoles pour filles s'organisent peu à peu à la suite de la loi Duruy de 1867 qui, dans son article premier,[26] impose l'ouverture de ces établissements dans les communes de plus de 5 habitants. Par la

26. Loi Duruy.

suite, de nombreuses personnalités politiques telles que Paul Bert, Camille Sée ou encore Jules Ferry œuvrent afin de garantir aux femmes un même accès à l'éducation que celui accordé aux hommes. Il faut attendre la révolte de mai 1968 pour que la mixité devienne « la norme à tous les niveaux de l'enseignement ».[27]

Outre l'insertion des femmes dans le milieu éducatif, les gouvernements contribuent également à la consolidation du système éducatif en autorisant le développement d'enseignements spécialisés, professionnels et techniques (loi Astier, 1919). Différentes réformes sont, ainsi, proposées et des politiques de « régulation des flux » ainsi que des politiques de « conseils » se mettent progressivement en place (c'est-à-dire, des mesures visant à améliorer la réussite des étudiants aux différents baccalauréats qui correspondent aux trois voies principales de l'enseignement secondaire : la voie générale, la voie professionnelle et la voie technologique). La loi d'orientation de 1989, encore connue sous l'appellation de « loi Jospin », marque un tournant dans l'histoire de l'éducation française. Cette nouvelle loi place l'éducation en tête des priorités nationales et entraîne une réorganisation des rythmes ainsi que des cycles scolaires afin de rehausser le taux de réussite aux épreuves du baccalauréat. En 1970, seuls 20% des candidats se sont vus remettre leur diplôme de fin d'étude. Suite à l'intervention du gouvernement, ce taux de réussite atteint pratiquement les 80% à compter des années 2000, toutes filières confondues.

S'il n'est plus question en 2005 que des enseignements différents soient dispensés selon le sexe des étudiants, les filles se distinguent néanmoins des garçons en affichant de meilleurs résultats, et donc de meilleurs parcours scolaires. Une étude menée par Baudelot et Establet (1992) révèle en effet que depuis les

27. Loi Faure édictée le 12 novembre 1968. Puis en 1975 la Loi Haby instaure le « collège unique pour tous ».

années 80 les résultats des filles n'ont cessé de progresser dans le primaire ainsi que dans le secondaire entraînant, de ce fait, une progression de la proportion de filles qui poursuivent des études supérieures. Compte tenu de ces récents constats et du rôle joué par les autorités gouvernantes dans l'éducation française, il nous paraît judicieux de conjuguer le critère du sexe (1^{er} niveau de partitionnement) avec celui du dernier diplôme obtenu (2^{nd} niveau de partitionnement) pour étudier l'impact des variations des préférences d'un décideur politique sur les inégalités de revenus.

Nous constituons six sous-groupes sur chacune des deux sous-partitions (celle regroupant les hommes et celle regroupant les femmes). Ces six sous-groupes représentent les différents niveaux des diplômes obtenus par les individus. Au sein d'un premier et même groupe nous rassemblons l'ensemble des hommes [respectivement des femmes] qui détiennent un diplôme correspondant à des études suivies dans l'enseignement supérieur pendant une durée d'au moins 3 ans (en termes d'années d'études validées après l'obtention du baccalauréat). Cela comprend les diplômes universitaires (de 1^{er} cycle (Licence, bac +3), 2^{nd} cycle (Master, bac +5) ou $3^{ième}$ cycle (Doctorat, bac +8) cycle) ainsi que les diplômes de grandes écoles (tels que les diplômes d'ingénieurs ou de normaliens (bac +5), par exemple). Un second sous-groupe représente les hommes [resp. les femmes] ayant obtenu un diplôme de l'enseignement supérieur dont le niveau est équivalent à deux années d'études suivies après le baccalauréat (bac +2). Ce sous-groupe rassemble les détenteurs d'un brevet de technicien supérieur (BTS), ou d'un diplôme universitaire de technologie (DUT) ou encore d'un diplôme des professions sociales et de la santé. Dans un troisième sous-groupe sont réunis les hommes [resp. les femmes] en possession d'un baccalauréat (général, technologique, ou professionnel) ou d'un diplôme reflétant un niveau équivalent (c'est-à-dire, un diplôme d'accès aux études universitaires (DAEU)). Tout homme [resp. toute femme] doté d'un brevet professionnel (BP), d'un brevet de technicien (BT), d'un certificat d'aptitude professionnelle (CAP) ou encore d'un brevet d'études professionnelles (BEP) est affecté à un quatrième sous-groupe. Le cinquième sous-groupe est réservé aux hommes [resp. femmes] qui ont stoppé leurs études après avoir obtenu le brevet des collèges, anciennement connu sous le nom de brevet d'études de premier cycle du second degré (BEPC). Enfin le sixième et dernier sous-groupe concerne l'ensemble des hommes [resp. de femmes] qui ne possèdent aucun diplôme ou qui ont quitté les chemins de l'école après avoir été diplômés du certificat d'études primaires (CEP). La répartition des hommes et des femmes selon ces différents sous-groupes est présentée dans les Tableaux 3.8 et 3.9.

Femmes / diplôme	LMD ou grande école	BTS, DUT, autre	Bac ou DAEU	BP, BT, CAP ou BEP	Brevet des collèges, BEPC	CEP ou aucun diplôme	Total
Effectif (%)	1 397 (20%)	797 (11%)	1 266 (18%)	1 759 (24%)	571 (8%)	1 332 (19%)	7 122 (100%)
Revenu moyen (€)	20 937,36	16 683,29	13 445,78	12 471,14	12 759,68	10 051,33	14 347,00
Variance	$2,35 \cdot 10^8$	$1,12 \cdot 10^8$	$1,02 \cdot 10^8$	$6,39 \cdot 10^7$	$7,19 \cdot 10^7$	$5,38 \cdot 10^7$	$1,22 \cdot 10^8$

Tableau 3.8 – **Statistiques élémentaires concernant les différents diplômes obtenus par les femmes**

Hommes / diplôme	LMD ou grande école	BTS, DUT, autre	Bac ou DAEU	BP, BT, CAP ou BEP	Brevet des collèges, BEPC	CEP ou aucun diplôme	Total
Effectif (%)	1 206 (17%)	619 (9%)	1 030 (14%)	2 486 (35%)	456 (6%)	1 362 (19%)	7 159 (100%)
Revenu moyen (€)	35 510,96	23 510,22	18 492,80	19 293,30	19 043,49	15 441,46	21 526,03
Variance	$1,26 \cdot 10^9$	$3,80 \cdot 10^8$	$1,65 \cdot 10^8$	$1,60 \cdot 10^8$	$2,63 \cdot 10^8$	$8,10 \cdot 10^7$	$4,01 \cdot 10^8$

Tableau 3.9 – **Statistiques élémentaires concernant les différents diplômes obtenus par les hommes**

Si le nombre de femmes diplômées à la suite de hautes études dans le supérieur tend à excéder celui des hommes, à diplôme égal, nous ne pouvons pas en dire autant de leurs revenus moyens. Les revenus moyens des hommes restent, en effet, largement supérieurs à ceux des femmes, toutes catégories confondues. Le dernier diplôme obtenu n'est cependant pas toujours représentatif de la profession effectivement exercée par son possesseur. Il est courant de rencontrer des individus surqualifiés (c'est-à-dire, surdiplômés) pour le poste qu'ils occupent dans le monde professionnel. De nombreuses raisons peuvent être avancées pour tenter d'expliquer ces disparités de revenus qui persistent encore en 2005 entre les sexes. Nous nous contenterons de mentionner le fait qu'au sein de notre échantillon, 988 individus parmi lesquels figurent 537 femmes[28] ont déclaré poursuivre encore des études au moment de l'enquête.

La présente illustration a, pour but, de mettre en exergue l'influence des pré-

28. cf. Tableaux 3.18 et 3.19 pour une répartition détaillée des effectifs en fonction du dernier diplôme obtenu.

férences d'un décideur politique sur son appréciation des disparités de revenus dans le cas de la France en 2005. Chacune des six mesures sur lesquelles nous nous basons pour tirer nos conclusions appartient à une seule et même famille de mesures : la famille des (α, δ)–Gini. L'ensemble des indicateurs membres de cette famille présentent la particularité d'être à la fois faiblement décomposable et cohérent en unité ("*unit-consistent*"). Rappelons qu'à l'exception de l'indice de Gini (obtenu lorsque $\alpha = \delta = 1$), ces indicateurs ne sont plus compris dans l'intervalle $[0; 1]$ mais dans l'intervalle $[0; \infty[$ – exception faite du cas où les indicateurs sont nuls. Les valeurs des indicateurs globaux d'inégalités ne peuvent donc pas être directement comparées les unes aux autres. En invoquant la propriété de décomposition faible, nous sommes en mesure d'opposer les contributions des composantes intragroupes et intergroupes des différents indicateurs retenus. Pour faciliter les différentes étapes de calculs, nous reprogrammons la macro commande Excel [29] afin d'adapter le schéma de décomposition de Dagum – qui représente une interprétation possible de l'axiome de décomposition faible (DEC1) – à la nouvelle paramétrisation que requiert les indicateurs de type (α, δ)–Gini. La moyenne des revenus est désormais affectée par un paramètre δ qui évolue indépendamment du paramètre α affecté à la valeur absolue des différences binaires de revenus. En faisant varier les valeurs de ces paramètres, nous formons divers indicateurs (α, δ)–Gini, que nous associons aux différentes idéologies politiques, conformément aux usages de la littérature. Nos divers indicateurs possédant néanmoins une structure commune, [30] nous obtenons des contributions des composantes intragroupes et intergroupes relativement proches d'un indicateur à l'autre, compte tenu des valeurs retenues pour les paramètres de sensibilité. Les disparités de revenus entre les femmes d'une part et entre les hommes d'autre par, restent d'environ

29. Il s'agit de la même macro que celle utilisée pour la réalisation des illustrations du Chapitre 1 (*cf.* Sec.1.2.3 et 1.3.3), que nous reparamétrons afin d'élargir son champ d'application à la classe entière des mesures (α, δ)–Gini.

30. Chacun d'eux repose sur le calcul de la somme de la valeur absolue des différence binaires de revenus élevée à une puissance α, *cf.* Eq. ((α, δ)–Gini).

48% quel que soit l'indicateur que nous considérons.

La répartition de ces inégalités au sein des deux sous-partitions laisse en revanche nettement transparaître des divergences d'opinions. Si la part des inégalités comptabilisées au sein du sous-groupe des femmes semble relativement élevée (soit 19,80% des inégalités totales) pour un décideur dont les préférences traduisent une orientation politique « à droite », leur contribution est dérisoire (seulement 0,78% des inégalités globales) pour un décideur dont les préférences peuvent être associées à un parti d'extrême gauche. De manière générale, une plus grande importance est attachée aux disparités présentes au sein du sous-groupe des hommes. Les mesures extrêmes accordent plus de poids aux écarts constatés entre les moyennes de revenus. Les hommes étant en moyenne plus riches que les femmes (au regard de l'indicateur de moyenne), ils retiennent toute l'attention des décideurs qui défendent les idées de ces partis [voir Tableau 3.10].

Orientation	Extrême gauche	Extrême droite	Gauche	Centre	Droite
Femmes	0,78%	3,15%	6,33%	11,07%	19,80%
Hommes	47,72%	45,14%	41,65%	36,65%	28,57%

Tableau 3.10 – **Classement des contributions intragroupes aux disparités globales selon les différents points de vue**

Les disparités à l'intérieur du sous-groupe des femmes et de celui des hommes sont perçues différemment selon les degrés de sensibilité des décideurs. Et bien que nous recourions à deux indicateurs distincts pour évaluer les inégalités de revenu d'un point de vue centriste, les contributions des composantes des deux indicateurs s'accordent sur une répartition visant à attribuer 11,07% des disparités totales aux écarts de revenus relevés entre les différents niveaux de diplômes obtenus par les femmes pendant que 36,65% des disparités sont notées au sein du sous-groupe des hommes. Le partage de ces inégalités entre les différents niveaux de diplômes n'est cependant pas le même pour ces deux indicateurs. Des distinctions s'opèrent notamment dans le classement des contributions des 6 sous-groupes construits dans chacune des sous-partitions.

Prenons pour commencer le sous-groupe des hommes. Le sous-groupe des hommes sans diplôme ou diplômés du certificat de fin d'études primaires (CEP) apparaît en haut du classement (pour les deux mesures « *centristes* »). Il s'agit en effet du sous-groupe dont la contribution aux inégalités globales est la plus faible. Par rapport à l'indicateur d'inégalités total du sous-groupe des hommes calculé pour les deux couples de valeurs retenus pour les préférences du décideur (c'est-à-dire, avec $\alpha = 2$ et $\delta = 1$ pour la mesure centriste au sens de Kolm (1976) et $\alpha = 2$ et $\delta = 1,8$ pour la mesure intermédiaire au sens de Bossert et Pfingsten (1990)), ce sous-groupe ne représente pas le même pourcentage. Il correspond à 36,76% des inégalités totales mesurées sur la sous-partition des hommes pour $\alpha = 2$ et $\delta = 1,8$ mais il n'est plus que de 28,18% lorsque $\delta = 1$ (cf. Tableaux 3.20 et 3.21).

Le sous-groupe des diplômés universitaires ou d'une grande école occupe quant à lui la dernière place du classement avec une contribution (enregistrée lorsque $\delta = 1,8$) de plus de 127,97% aux inégalités totales du sous-groupe des hommes. Les inégalités au sein de ce sous-groupe sont, donc, largement supérieures aux inégalités constatées sur l'ensemble de la sous-partition des hommes. Ce constat est d'autant plus marqué lorsque l'on considère $\delta = 1$. La part des inégalités de ce sous-groupe représente alors plus de 190% des inégalités de revenus entre les hommes. Ces différences d'appréciation pour une même idéologie s'expliquent en grande partie par la structure des indicateurs. Lorsque $\delta = 1$, tout se passe comme si le décideur accordait presque autant d'importance aux revenus moyens des sous-groupes, qu'aux écarts de revenus qui opposent les hommes de ces sous-groupes. Un décideur politique doté de telles préférences perçoit les disparités de revenus entre les hommes diplômés universitaires ou d'une grande école plus intensément, compte tenu du fait que ce sous-groupe est le plus riche en moyenne, comparativement aux moyennes des autres sous-groupes. L'ordre du classement des contributions des sous-groupes restants tend à s'inverser d'une mesure à l'autre, mais l'écart ne se joue qu'à quelques points de pourcentage.

Le caractère inégalitaire du sous-groupe des hommes ayant validé leurs études supérieures (LMD ou grande école) ne fait aucun doute au regard des classements réalisés à partir des autres indicateurs. Quel que soit le point de vue du décideur politique, ce sous-groupe reste en dernière position des classements. Nos conclusions concernant les contributions des autres sous-groupes tendent à rejoindre celles présentées pour le cas centriste. A l'exception de la mesure relative – représentative d'un jugement de valeurs orienté à droite – pour laquelle l'ordre des contributions est complètement bouleversé, nous ne dénotons pas de changement majeur dans l'ordre des diverses contributions. Il existe, cependant, de gros écarts entre les parts d'inégalités que représente un même sous-groupe dans les différents classements. Par exemple, alors que le sous-groupe des hommes sans diplôme ou en possession d'un CEP semble ne concentrer que 0,28% des disparités de revenus présentes dans le sous-groupe des hommes pour un décideur d'extrême gauche, un décideur d'extrême droite évalue la contribution de ce même sous-groupe à hauteur de 12,66% compte tenu de ses nouvelles préférences (voir Tableaux 3.22 et 3.23). La confrontation des contributions des coefficients d'inégalités de revenus entre les différents sous-groupes nous amène à des conclusions analogues. Nous retrouvons l'idée que, les disparités les plus importantes résident principalement entre le sous-groupe des plus hauts diplômés (LMD ou grande école) et les autres sous-groupes. Le coefficient visant à mesurer les écarts de revenus entre les hauts diplômés (LMD ou grande école) et les moins diplômés (CEP ou aucun diplôme) ressort à deux reprises (du point de vue de droite et d'extrême droite) du classement comme étant le coefficient dont la contribution aux inégalités de l'ensemble de l'échantillon est la plus conséquente (de l'ordre de 37% et 31%, voir Tableaux 3.37 et 3.35).

A présent, regardons ce qu'il se passe sur la sous-partition des femmes. En appliquant un raisonnement analogue à celui présenté dans le cas de l'analyse des disparités entre les hommes, nous cherchons à déterminer quel est le niveau d'étude qui génère le plus d'inégalité de revenus comparativement aux autres sous-groupes. Cette procédure laisse apparaître des classements (de contributions) plus disparates que ceux obtenus sur la sous-partition des hommes. Si le sous-groupe des femmes diplômées de hautes études supérieures (LMD ou grande école) reste le sous-groupe le plus inégalitaire pour un décideur de gauche, d'extrême gauche ou plutôt au centre, ce résultat ne fait pas l'unanimité auprès des décideurs de droite et d'extrême droite. C'est en effet le sous-groupe des femmes en possession d'un baccalauréat (ou DAEU) qui est perçu comme le sous-groupe le plus inégalitaire au sein de la sous-partition des femmes, avec une contribution à hauteur de 102,33% des inégalités de revenus totales relevées entre les femmes (voir Tableau 3.31). De la même façon, le sous-groupe des femmes dépourvues de diplôme ou détentrices d'un CEP est désigné par un décideur d'extrême droite, comme le sous-groupe le plus inégalitaire. La contribution de ce sous-groupe représente à lui seul plus de 142% de la totalité des inégalités évaluées au sein du sous-groupe des femmes compte tenu des préférences du décideur (c'est-à-dire, telles que $\alpha = 3$ et $\delta = 4$, soit une aversion pour les inégalités plutôt forte). Chaque parti politique (ou presque) présentant un sous-groupe différent en tête de son classement (voir Tableaux 3.30, 3.31, 3.29, 3.28, 3.26 et 3.27), la détermination du sous-groupe le moins inégalitaire est moins évidente sur cette sous-partition.

Sur le plan des inégalités intergroupes, ce sont les écarts de revenus entre les femmes ayant validé de hautes études supérieures (LMD ou grande école) et celles des autres sous-groupes dont les diplômes sont moins avancés qui ressortent à nouveau de notre analyse. Pour compléter notre étude, nous exprimons désormais les contributions des divers sous-groupes en fonction des disparités calculées sur l'ensemble de l'échantillon (voir Tableaux 3.36, 3.37, 3.32, 3.33 et 3.34). Seul le classement qui résulte des appréciations d'un décideur d'extrême droite se démarque encore des autres. Compte tenu de ses préférences, un décideur d'extrême droite perçoit les écarts entre les revenus des femmes diplômées d'un baccalauréat (ou DAEU) et les revenus des femmes en possession d'autres diplômes comme les écarts les plus notables à l'intérieur de la sous-partition des femmes. Les contributions évaluées par un tel décideur n'excèdent cependant pas 4,50% (voir Tableau 3.35), soit une part relativement faible des disparités totales qui existent au sein de notre échantillon.

A l'issue de ces résultats nous pouvons dire que le jugement de valeur intégré dans la mesure d'inégalités retenue pour l'évaluation des disparités au sein d'un échantillon a toute son importance. Les conclusions diffèrent selon le point de vue politique partagé par le décideur. De plus, les jugements de valeur tendent à influer sur la perception des contributions des divers sous-groupes aux disparités totales et *a fortiori* sur la mise en place des actions redistributives. La prise en compte des préférences du décideur constitue donc une étape déterminante dans le calcul d'un indicateur d'inégalités. Les indicateurs ne réagissent, en effet, pas de la même manière selon les transformations subies par la distribution de revenus. Afin d'illustrer nos propos, nous envisageons l'application de deux transformations sur les revenus de l'ensemble des individus, hommes et femmes confondus. La première transformation consiste à ajouter 5000€ au revenu annuel de chaque individu. Les inégalités sont ensuite calculées sur cette nouvelle distribution de revenus afin de juger de l'influence qu'une telle action peut avoir sur la perception des inégalités par un décideur, en fonction de ses préférences. Les modifications observées sont résumées dans le tableau ci-après :

$\{\alpha, \delta\}$	$\{4, -1, 5\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 5, 0\}$	$\{2, 1\}$	$\{2, 1, 8\}$	$\{1, 1\}$
Orientation	Extrême gauche	Extrême droite	Gauche	Centre (Kolm)	Centre	Droite
Impact sur $G^{\alpha,\delta}$	+45%	-63%	$--$	-22%	-36%	-22%

Tableau 3.11 – **Impact d'une action redistributive de type $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \varepsilon$ sur les inégalités selon les différents points de vue, avec $\varepsilon = +5000$**

Par définition, une mesure absolue (traduisant une opinion de gauche) est invariante par translation. L'indicateur d'inégalités ne subit donc aucune modification à la suite de la mise en place d'une telle action. Une diminution effective des disparités est constatée du point de vue d'un décideur d'extrême droite (avec une baisse de -63% du coefficient (3,4)–Gini). Cette tendance à la baisse est également perçue au travers des évaluations proposées par les décideurs de droite (-22%) et du centre (-22% pour la mesure traduisant la vision centriste au sens de Kolm et -36% pour la vision intermédiaire au sens de Bossert et Pfingsten (1990)). Une telle similitude dans l'évolution des indicateurs d'inégalités se justifie aisément du point de vue mathématique. La structure de l'indicateur retenu pour cette analyse est telle que le numérateur reste invariant suite à l'ajout d'une quantité $\varepsilon > 0$ au revenu de chaque individu, pendant que le dénominateur augmente. La diminution de la mesure des inégalités globales suite à une telle opération est donc immédiate. De plus, les mesures intermédiaires au sens Bossert et Pfingsten (1990) constituent, d'après les auteurs, un *compromis* entre les mesures illustrant respectivement les points de vue de gauche et de droite. Et bien que depuis 1998 le courant d'idées centristes en

France affirme sa volonté de se démarquer de la droite, il est fréquent, encore aujourd'hui, de constater le rattachement de certains partis à la majorité présidentielle (qui se trouve être la droite pour notre période d'étude).[31] L'effet amplificateur des inégalités se retrouve également dans l'évaluation obtenue pour un décideur d'extrême gauche avec un accroissement de +45% calculé à partir de la variation de la valeur de l'indicateur $(4, -1,5)$–Gini suite à la transformation appliquée sur les revenus.

La seconde transformation que nous étudions, suggère d'augmenter le revenu de chaque individu de 10%. Les individus reçoivent ainsi des dotations proportionnelles à leur revenu d'origine. Un tel mécanisme permet de mettre en avant une autre des propriétés intrinsèques que confère l'*unit consistency* à une mesure d'inégalités faiblement décomposable. Pour déterminer l'impact d'une telle action sur l'indicateur d'inégalité globale, il suffit de connaître le degré d'homogénéité des différentes fonctions, comme cela est indiqué dans le tableau ci-dessous :

$\{\alpha, \delta\}$	$\{4, -1,5\}$	$\{3, 4\}$	$\{2,5, 0\}$	$\{2, 1\}$	$\{2, 1,8\}$	$\{1, 1\}$
Orientation	Extrême gauche	Extrême droite	Gauche	Centre (Kolm)	Centre	Droite
Impact sur $G^{\alpha,\delta}$	$\times 1,1^{5,5}$	$\times 1,1^{-1}$	$\times 1,1^{2,5}$	$\times 1,1^{1}$	$\times 1,1^{0,2}$	$\times 1,1^{0}$
soit en %	+69%	−10%	+27%	+10%	+2%	−−

Tableau 3.12 – **Impact d'une action redistributive de type $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\lambda}$ sur les inégalités selon les différents points de vue, avec $\boldsymbol{\lambda} = 10\%$**

31. On parle alors de centre droit *vs* centre gauche.

A la différence de l'action précédente, cette transformation tend à encourager les inégalités entre les individus. Une nette croissance des écarts de revenus est enregistrée pour la plupart des indicateurs étudiés. La seule diminution des inégalités est constatée auprès d'un décideur d'extrême droite, pour qui, le fait d'augmenter les revenus de chaque individu de 10% entraîne une baisse d'un montant équivalent des disparités sur l'ensemble de l'échantillon. Au vu de ces résultats, nous déduisons que la majorité des décideurs politiques ne sont pas favorables à une action visant à augmenter les revenus annuels de chaque individu de 10%. Une telle procédure bénéficie davantage aux hauts revenus de la distribution et accroît d'autant plus les écarts de revenus que les individus les plus aisés entretiennent avec les individus moins bien lotis. De tels résultats pouvaient être anticipés en faisant simplement appel à la propriété d'*unit consistency*. Partant du principe que toute mesure faiblement décomposable et *unit-consistent* est homogène de degré $\alpha - \delta$, il suffit de déterminer ce degré d'homogénéité pour chacun des indicateurs envisagés. Nous pouvons, ainsi, déduire l'impact que cette nouvelle transformation a sur les inégalités. Toute mesure de droite étant homogène de degré 0, la transformation est bien entendu sans effet sur l'indice de Gini.

En conclusion, cette illustration démontre une nouvelle fois l'importance du rôle joué par les préférences d'un décideur politique sur sa perception des inégalités. En combinant la propriété d'*unit consistency* à celle de décomposition faible, nous disposons d'une famille d'indicateurs d'inégalités qui englobe tous les jugements de valeur que peut exprimer la société française. En appliquant le schéma de décomposition faible sur deux niveaux de partitions (le sexe et le dernier diplôme obtenu), nous constatons que pour l'ensemble des décideurs, quel que soit le parti politique auquel ils sont rattachés, le sous-groupe des hommes ayant poursuivi et validé de hautes études supérieures est celui qui entretient le plus d'inégalités avec les autres sous-groupes. La détermination du sous-groupe le plus inégalitaire parmi les femmes est en revanche moins évident. Les décideurs semblent partagés entre 3 sous-groupes selon leurs préférences : le sous-groupe des femmes ayant un diplôme de niveau bac +5 et plus (opinion partagée par les décideurs d'extrême gauche, de gauche et du centre), le sous-groupe des femmes en possession d'un baccalauréat (pour un décideur de droite) ou tout au contraire le sous-groupe des femmes ayant un CEP, voire aucun diplôme (pour un décideur d'extrême droite). L'influence que peuvent avoir les préférences d'un décideur politique sur son appréciation des disparités est également déterminante pour le choix des mesures redistributives qui devront être mises en place. Et même si une nouvelle fois, les résultats que nous obtenons ne sont pas unanimes, nous constatons qu'il est préférable d'augmenter l'ensemble des revenus de manière uniforme plutôt que de redistribuer au prorata de ce que chaque individu détient.

3.4 Conclusion

A partir de 1992, plusieurs enquêtes réalisées sous forme de questionnaires par Amiel et Cowell (1992), Ballano et Ruiz-Castillo (1993), Harrison et Seidl (1994) ou encore Seidl et Theilen (1994) apportent la certitude qu'une mesure relative n'est pas toujours la mieux indiquée pour évaluer les inégalités au sein d'une population. Ces enquêtes révèlent en effet que « les individus ne sont en aucune façon unanimes dans leur choix entre les notions d'inégalités relatives, absolues, intermédiaires ou centristes » [*cf.* Del Rio et Ruiz-Castillo, 2000 p. 225-226]. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les fondements axiomatiques des mesures faiblement décomposables qu'elles soient relatives, absolues, intermédiaires, centristes ou plus extrêmes. Nous partageons l'idée formulée par Bosmans, Decancq et Decoster (2013) selon laquelle : « *Invariance requierements deal with the normative issue of how to distribute amounts of various sizes in an inequality-neutral way and hence they reflect an important* *aspect of the notion of inequality which extends beyond the independence of the unit of measurement.* » [Bosmans *et al.* (2013), p. 14 note 3].

Nous introduisons une formulation plus générale de l'axiome de décomposition faible afin qu'il soit compatible avec la grande majorité des propriétés d'invariance répertoriées dans la littérature. Cette généralisation que nous notons (DEC1), s'obtient en substituant aux fonctions de pondération proposées par Ebert (2010), des fonctions qui tiennent compte à la fois de la taille ainsi que de la moyenne des distributions. La caractérisation présentée dans le Théorème 3.2.1 offre un résultat très proche de celui dérivé par Shorrocks (1980, 1984) dans le cas des mesures additivement décomposables. Nous montrons, en effet, que les mesures faiblement décomposables peuvent également être présentées comme une somme pondérée de fonctions $\phi(\cdot,\cdot)$ qui satisfont les propriétés usuelles de base exigibles d'une mesure d'inégalités.

A partir de cette formulation très générale, nous faisons appel à la propriété d'*unit consistency* introduite par Zheng (2005, 2007a, b, c) afin de raffiner notre caractérisation et de préciser la structure des mesures faiblement décomposables et *unit-consistent*. Au-delà de la notion de cohérence en unité que suggère l'axiome d'*unit consistency* (UC), cette propriété permet de définir une classe de mesures homogènes de degré α et décomposables en sous-groupes, comme nous l'avons montré dans le Lemme 3.3.2. Nous avons, alors, proposé une caractérisation d'une famille de mesures faiblement décomposables à deux paramètres (α et δ) qui incluent différents jugements de valeur représentant l'ensemble des points de vue politiques se trouvant entre l'extrême gauche et l'extrême droite. Notre famille de mesures à 2 paramètres $\{G_{\alpha,\delta}(\cdot,n)\}_{n\geqslant 2}$ contient des indices aussi bien absolus, que relatifs, intermédiaires ou répondant à des règles d'invariance plus spécifiques, selon les valeurs empruntées par les paramètres α et δ.

Notons que lorsque $\delta = \alpha = 2$, l'indice $G_{2,2}(\mathbf{x}, n)$ correspond au coefficient de variation élevé au carré, qui appartient à la famille des mesures de l'entropie généralisée, c'est-à-dire, à la famille des indices additivement décomposables. Par ailleurs si $\alpha = \delta = 1$, nous retrouvons l'expression de l'indice de Gini standard défini comme étant une mesure purement dépendante du rang et de fait non additivement décomposable. Si en revanche, nous imposons $\delta = 0$, nous obtenons leurs pendants absolus à savoir la variance (pour $\alpha = 2$) et la différence moyenne de Gini (pour $\alpha = 1$). Les différentes mesures reconnues dans la littérature qui sont incluses dans notre famille $\{G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)\}_{n \geqslant 2}$ sont récapitulées dans les tableaux ci-après.

Conditions sur α & δ	$\alpha > 0$	$\alpha = \delta$
Propriété de $G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)$	$G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}_n, n) = G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n)$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{++}$	$G_{\alpha,\delta}(\lambda \mathbf{x}, n) = G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}_{++}$
Jugement de valeur / Concept	Gauche absolu	Droite relatif
Mesures d'inégalités remarquables	avec $c = 1/2$ GMD ($\alpha = 1$) Variance ($\alpha = 2$)	avec $c = 1/4$ Gini ($\alpha = \delta = 1$) CV^2 ($\alpha = \delta = 2$)

Tableau 3.13 – **Interprétation des valeurs des paramètres : les concepts usuels**

Conditions sur α & δ	$\delta < \alpha$ $0 < \delta$	$\delta = \alpha - 1$ *ssi* $\tau = 0$
Propriété de $G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)$	$G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}_n, n) < G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n)$ $G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n) < G_{\alpha,\delta}(\theta\mathbf{x}, n),\ \theta > 1$	$G_{\alpha,\delta}(\theta(\mathbf{x} - \tau\mathbf{1}^n) + \tau\mathbf{1}^n, n)$ $= \theta G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n)$ avec $-\infty < \tau \leqslant 0$ & $\theta \in \mathbb{R}$
Jugement de valeur / Concept	Intermédiaire [*Bossert et Pfingsten (1990)*]	Centre [*Kolm (1976)*]
Mesure d'inégalités remarquable	Généralisation des mesures de Krtscha ($\alpha = 2$ et $\delta \in]0; 2[$)	—

Tableau 3.14 – **Interprétation des valeurs des paramètres : les concepts centristes**

Conditions sur α & δ	$\delta < 0$	$\delta > \alpha$ $\forall \delta > 0$
Propriété de $G_{\alpha,\delta}(\cdot, n)$	$G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{1}_n, n) > G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n)$ $\forall \varepsilon > 0$	$G_{\alpha,\delta}(\mathbf{x}, n) > G_{\alpha,\delta}(\theta\mathbf{x}, n)$ $\forall \theta > 1$
Jugement de valeur / Concept	Extrême gauche	Extrême droite

Tableau 3.15 – **Interprétation des valeurs des paramètres : les concepts extrêmes**

Notre classe de mesures peut alors être perçue comme une classe hybride qui peut conduire, soit à des mesures purement dépendantes du rang, soit à des mesures additivement séparables.

Si la question du choix de la méthode de décomposition à retenir pour un indicateur d'inégalités se pose, il peut être intéressant, d'examiner les réactions des différentes composantes suite à l'application d'actions redistributives. La discussion menée à ce sujet au cours de notre analyse rappelle que les mesures additivement décomposables offrent une appréciation moins précise de l'impact de transferts de revenus réalisés entre individus de sous-groupes différents comparativement à la décomposition faible. Par ailleurs, lorsque des transferts intragroupes sont envisagés, la décomposition additive permet de cibler avec précision les répercussions de telles actions sur le sous-groupe auquel elles se rapportent, la valeur des autres composantes restant inchangée.

L'illustration empirique relative à l'évaluation des disparités de revenus présentes au sein de notre échantillon de données prélevé en France en 2005, nous a permis de compléter nos précédentes conclusions présentées dans le Chapitre 1. Existe t-il encore en France, en 2005, des inégalités de revenus entre les hommes et les femmes ? **Oui**. Ces inégalités peuvent-elles être imputables à des différences de qualification observées tant sur le plan scolaire que sur le plan professionnel (années d'expériences) ? **Oui**. Sont-elles très marquées ? **Tout dépend du point de vue duquel on se place pour en juger**, mais il est du ressort de l'économiste de mener une analyse impartiale, en envisageant tous les points de vue possibles.

En décomposant les différents indicateurs (α, δ)–Gini sur deux niveaux de partition (le sexe et le dernier diplôme obtenu), nous constatons qu'à diplôme égal les hommes possèdent en moyenne des revenus plus élevés que les femmes, dans notre échantillon. La contribution des inégalités au sein du sous-groupe des hommes aux inégalités totales reste dominante, quel que soit le point de vue politique du décideur. La valeur de cette contribution fluctue cependant entre $47,72\%$ (pour un décideur d'extrême gauche) et $28,57\%$ (pour un décideur de droite). De la même façon, la contribution du sous-groupe des femmes varie entre $0,78\%$ (pour un décideur d'extrême gauche) et $19,80\%$ (pour un décideur de droite) des inégalités totales. Alors que le sous-groupe des hommes en possession d'un diplôme d'études supérieures apparaît clairement comme le sous-groupe le plus inégalitaire de notre échantillon, les points de vues sont partagés lorsque l'on s'intéresse au sous-groupe des femmes. Trois niveaux d'études différents retiennent l'attention des décideurs. Alors que les décideurs partageant des points de vues de gauche, d'extrême gauche et du centre s'accordent pour désigner le sous-groupe des femmes ayant obtenu un diplôme de niveau au moins bac+3 comme le sous-groupe le plus inégalitaire, les avis sont partagés entre le sous-groupe des femmes de niveau bac et celui des femmes sans diplôme ou de niveau CEP pour les décideurs de droite et d'extrême droite. Les préférences d'un décideur politique ont, donc, bien une influence notable sur son appréciation des disparités.

3.5 Annexes

3.5.1 Tableaux relatifs à l'exemple illustratif [Chap. 3, Sect. 3.2]

Décomposition	(DA)	(DEC1)
CV_{11}^2	0,27	0,27
CV_{22}^2	0,22	0,22
CV_W^2	0,2446	0,1223
CV_B^2	0,0083	0,1306
CV_T^2	0,2529	

Tableau 3.16 – **Inégalités intra- et intergroupes calculées après application d'un transfert progressif dans le sous-groupe 1.**

Décomposition	(DA)	(DEC1)
CV_{11}^2	0,32	0,32
CV_{22}^2	0,19	0,19
CV_W^2	0,2446	0,1223
CV_B^2	0,0083	0,1306
CV_T^2	0,2529	

Tableau 3.17 – **Inégalités intra- et intergroupes calculées après application d'un transfert progressif dans le sous-groupe 2.**

3.5.2 Tableaux relatifs à l'illustration [Chap. 3, Sect. 3.3]

Femmes / diplôme	LMD ou grande école	BTS, DUT, autre	Bac ou DAEU	BP, BT, CAP ou BEP	Brevet des collèges, BEPC	CEP ou aucun diplôme	Total
Effectif	146	62	195	72	34	28	537
Tranches d'âges concernées	19-61 ans	19-61 ans	18-65 ans	18-62 ans	18-58 ans	18-58 ans	18-65 ans

Tableau 3.18 – **Répartition des femmes suivant des études au cours de l'enquête.**

Hommes / diplôme	LMD ou grande école	BTS, DUT, autre	Bac ou DAEU	BP, BT, CAP ou BEP	Brevet des collèges, BEPC	CEP ou aucun diplôme	Total
Effectif	101	55	147	80	46	22	451
Tranches d'âges concernées	18-62 ans	18-49 ans	18-57 ans	18-63 ans	18-55 ans	18-63 ans	18-65 ans

Tableau 3.19 – **Répartition des hommes suivant des études au cours de l'enquête.**

Centriste (2,1,1)						
Hommes / diplôme	CEP ou aucun diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	Bac ou DAEU	Brevet des collèges, BEPC	BTS, DUT autre	LMD ou grande école
Contribution	28,18%	44,44%	48,02%	74,22%	86,86%	190,99%

Tableau 3.20 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des hommes.**

Intermédiaire (2,1,8,1)						
Hommes / diplôme	CEP ou aucun diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	Bac ou DAEU	BTS, DUT autre	Brevet des collèges, BEPC	LMD ou grande école
Contribution	36,76%	48,51%	54,22%	80,95%	81,87%	127,97%

Tableau 3.21 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des hommes.**

Extrême gauche (4,-1,5,1)						
Hommes / diplôme	CEP ou aucun diplôme	Bac ou DAEU	Brevet des collèges, BEPC	BP, BT, CAP ou BEP	BTS, DUT autre	LMD ou grande école
Contribution	0,25%	0,69%	9,57%	13,19%	51,20%	1008,18%

Tableau 3.22 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des hommes.**

Extrême droite (3,4,1)						
Hommes / diplôme	CEP ou aucun diplôme	Bac ou DAEU	BP, BT, CAP ou BEP	Brevet des collèges, BEPC	BTS, DUT autre	LMD ou grande école
Contribution	12,66%	13,59%	36,35%	48,07%	49,72%	58,30%

Tableau 3.23 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des hommes.**

Gauche (2,5,0,1)						
Hommes / diplôme	CEP ou aucun diplôme	Bac ou DAEU	BP, BT, CAP ou BEP	Brevet des collèges, BEPC	BTS, DUT autre	LMD ou grande école
Contribution	8,91%	19,32%	29,97%	45,78%	84,43%	384,45%

Tableau 3.24 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des hommes.**

Droite (1,1,1)						
Hommes / diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	CEP ou aucun diplôme	BTS, DUT autre	Bac ou DAEU	Brevet des collèges, BEPC	LMD ou grande école
Contribution	75,38%	78,37%	93,77%	101,60%	105,96%	108,31%

Tableau 3.25 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des hommes.**

Centriste (2,1,1)						
Femmes / diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	CEP ou aucun diplôme	Brevet des collèges, BEPC	BTS, DUT autre	Bac ou DAEU	LMD ou grande école
Contribution	60,09%	62,81%	66,08%	79,09%	89,22%	131,77%

Tableau 3.26 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des femmes.**

Intermédiaire (2,1,8,1)						
Femmes / diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	BTS, DUT autre	Brevet des collèges, BEPC	CEP ou aucun diplôme	Bac ou DAEU	LMD ou grande école
Contribution	67,21%	70,10%	72,58%	83,49%	93,98%	97,39%

Tableau 3.27 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des femmes.**

Extrême gauche (4,-1,5,1)						
Femmes / diplôme	Brevet des collèges, BEPC	CEP ou aucun diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	Bac ou DAEU	BTS, DUT autre	LMD ou grande école
Contribution	8,65%	15,13%	15,77%	24,90%	40,87%	614,79%

Tableau 3.28 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des femmes.**

Extrême droite (3,4,1)						
Femmes / diplôme	BTS, DUT autre	Brevet des collèges, BEPC	BP, BT, CAP ou BEP	LMD ou grande école	Bac ou DAEU	CEP ou aucun diplôme
Contribution	35,09%	48,06%	59,55%	59,66%	74,10%	142,69%

Tableau 3.29 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des femmes.**

Gauche (2,5,0,1)						
Femmes / diplôme	CEP ou aucun diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	Brevet des collèges, BEPC	Bac ou DAEU	BTS, DUT autre	LMD ou grande école
Contribution	38,36%	42,71%	44,27%	72,13%	80,08%	228,45%

Tableau 3.30 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des femmes.**

Droite (1,1,1)						
Femmes / diplôme	BP, BT, CAP ou BEP	BTS, DUT autre	CEP ou aucun diplôme	Brevet des collèges, BEPC	LMD ou grande école	Bac ou DAEU
Contribution	85,45%	87,63%	92,77%	93,37%	95,18%	102,33%

Tableau 3.31 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intragroupes au sein de la partition des femmes.**

Afin de faciliter la saisie des tableaux contenant les contributions intergroupes aux **inégalités globales** (c'est-à-dire, de l'ensemble de la population, hommes et femmes confondus), nous recourons au codage suivant :

- G1 = études supérieures de niveaux bac +3 à bac +8 : LMD ou grande école
- G2 = études supérieures de niveau bac +2 : BTS, DUT et autres
- G3 = études de niveau bac : Bac ou DAEU
- G4 = brevets et certificats d'aptitudes : BP, BT, CAP ou BEP
- G5 = Brevet des collèges (ancien BEPC)
- G6 = étude de niveau primaire : CEP ou aucun diplôme

Centriste (2,1,1)			
% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Hommes		% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Femmes	
G6-G6	10,33 %	G4-G4	6,65%
G4-G6	14,48 %	G6-G6	6,95%
G3-G6	14,83 %	G5-G4	6,99%
G4-G4	16,29 %	G4-G6	7,12%
G4-G3	16,96 %	G5-G5	7,32%
G3-G3	17,60 %	G5-G6	7,57%
G5-G6	20,39 %	G3-G4	8,37%
G4-G5	21,71 %	G2-G4	8,65%
G5-G3	22,49 %	G3-G5	8,65%
G2-G4	25,64 %	G2-G2	8,76%
G2-G6	26,60 %	G2-G5	8,81%
G2-G3	26,75 %	G3-G6	9,26%
G5-G5	27,20 %	G2-G3	9,71%
G2-G5	30,68 %	G3-G3	9,88%
G2-G2	31,83 %	G2-G6	10,22%
G1-G2	59,60 %	G1-G2	12,63%
G1-G4	60,54 %	G1-G5	14,41%
G1-G3	62,61 %	G1-G4	14,41%
G1-G5	64,85 %	G1-G1	14,59%
G1-G6	67,48 %	G1-G3	14,87%
G1-G1	70,00 %	G1-G6	17,08%

Tableau 3.32 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intergroupes aux inégalités totales.**

Intermédiaire (2,1,8,1)			
% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Hommes		% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Femmes	
G6-G6	13,47%	G4-G4	7,44%
G4-G6	17,04%	G5-G4	7,75%
G4-G4	17,78%	G2-G2	7,76%
G3-G6	17,84%	G5-G5	8,04%
G4-G3	18,82%	G2-G4	8,41%
G3-G3	19,87%	G2-G5	8,52%
G4-G5	23,82%	G4-G6	8,58%
G5-G6	24,16%	G5-G6	9,01%
G5-G3	25,09%	G3-G4	9,07%
G2-G4	25,58%	G6-G6	9,24%
G2-G3	27,00%	G2-G3	9,26%
G2-G6	27,95%	G3-G5	9,30%
G2-G2	29,67%	G1-G2	10,07%
G5-G5	30,00%	G2-G6	10,35%
G2-G5	30,73%	G3-G3	10,40%
G1-G2	44,97%	G3-G6	10,71%
G1-G1	46,90%	G1-G1	10,78%
G1-G4	46,94%	G1-G5	12,16%
G1-G3	48,74%	G1-G4	12,20%
G1-G5	50,35%	G1-G3	12,44%
G1-G6	53,03%	G1-G6	14,75%

Tableau 3.33 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intergroupes aux inégalités totales.**

Extrême gauche (4,-1,5,1)			
% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Hommes		% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Femmes	
G6-G6	0,12%	G5-G5	0,07%
G3-G6	0,21%	G5-G6	0,10%
G3-G3	0,33%	G5-G4	0,10%
G5-G6	2,10%	G6-G6	0,12%
G5-G3	2,41%	G4-G6	0,12%
G4-G6	2,84%	G4-G4	0,12%
G4-G3	3,25%	G3-G5	0,13%
G5-G5	4,57%	G3-G6	0,15%
G4-G5	5,40%	G3-G4	0,16%
G4-G4	6,29%	G2-G5	0,19%
G2-G6	9,55%	G3-G3	0,19%
G2-G3	10,94%	G2-G6	0,21%
G2-G5	13,42%	G2-G4	0,22%
G2-G4	14,41%	G2-G3	0,26%
G2-G2	24,44%	G2-G2	0,32%
G1-G6	126,42%	G1-G6	1,67%
G1-G3	151,08%	G1-G4	1,93%
G1-G5	157,85%	G1-G5	1,94%
G1-G4	160,13%	G1-G3	2,09%
G1-G2	198,82%	G1-G2	2,36%
G1-G1	481,15%	G1-G1	4,80%

Tableau 3.34 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intergroupes aux inégalités totales.**

Extrême droite (3,4,1)			
% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Hommes		% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Femmes	
G6-G6	5,72%	G2-G2	1,11%
G3-G6	6,11%	G2-G5	1,35%
G3-G3	6,14%	G2-G4	1,42%
G4-G3	11,70%	G5-G5	1,51%
G4-G6	14,00%	G2-G3	1,54%
G5-G3	14,40%	G5-G4	1,68%
G4-G4	16,41%	G1-G2	1,77%
G5-G6	17,57%	G2-G6	1,86%
G4-G5	18,84%	G4-G4	1,88%
G2-G3	18,98%	G1-G1	1,88%
G2-G4	21,11%	G3-G5	1,97%
G5-G5	21,70%	G3-G4	2,14%
G2-G6	22,06%	G1-G5	2,26%
G2-G2	22,44%	G1-G3	2,30%
G2-G5	22,84%	G1-G4	2,31%
G1-G1	26,32%	G3-G3	2,33%
G1-G2	27,54%	G5-G6	2,42%
G1-G3	28,82%	G1-G6	2,72%
G1-G4	28,84%	G4-G6	2,74%
G1-G5	29,49%	G3-G6	3,02%
G1-G6	30,58%	G6-G6	4,50%

Tableau 3.35 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intergroupes aux inégalités totales.**

Gauche (2,5,0,1)			
% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Hommes		% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Femmes	
G6-G6	3,71%	G6-G6	2,43%
G3-G6	6,04%	G4-G6	2,68%
G3-G3	8,04%	G4-G4	2,70%
G4-G6	8,57%	G5-G6	2,75%
G4-G3	10,23%	G5-G4	2,75%
G5-G6	11,82%	G5-G5	2,80%
G4-G4	12,48%	G3-G4	3,64%
G5-G3	13,57%	G3-G5	3,69%
G4-G5	15,68%	G3-G6	3,74%
G5-G5	19,06%	G2-G4	4,30%
G2-G6	21,85%	G2-G5	4,32%
G2-G3	22,75%	G3-G3	4,56%
G2-G4	24,50%	G2-G6	4,75%
G2-G5	27,87%	G2-G3	5,06%
G2-G2	35,16%	G2-G2	5,07%
G1-G3	99,03%	G1-G2	10,34%
G1-G4	99,27%	G1-G5	10,64%
G1-G6	101,17%	G1-G4	10,65%
G1-G5	103,27%	G1-G3	11,22%
G1-G2	105,17%	G1-G6	11,78%
G1-G1	160,11%	G1-G1	14,45%

Tableau 3.36 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intergroupes aux inégalités totales.**

Droite (1,1,1)			
% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Hommes		% $G_{kh}^{\alpha,\delta}$ Femmes	
G4-G4	21,53%	G4-G4	16,92%
G6-G6	22,39%	G2-G2	17,35%
G4-G6	22,87%	G5-G4	17,77%
G2-G4	25,36%	G4-G6	18,23%
G4-G3	25,68%	G2-G4	18,29%
G4-G5	26,30%	G6-G6	18,37%
G2-G2	26,79%	G5-G5	18,49%
G3-G6	27,15%	G2-G5	18,68%
G5-G6	27,76%	G1-G2	18,76%
G2-G6	28,23%	G1-G1	18,85%
G2-G3	28,55%	G3-G4	18,85%
G3-G3	29,02%	G5-G6	19,24%
G2-G5	29,16%	G2-G3	19,25%
G5-G3	29,67%	G3-G5	19,45%
G5-G5	30,27%	G3-G3	20,27%
G1-G1	30,94%	G3-G6	20,53%
G1-G2	31,56%	G2-G6	20,84%
G1-G4	32,98%	G1-G4	21,09%
G1-G3	35,04%	G1-G5	21,18%
G1-G5	35,44%	G1-G3	21,36%
G1-G6	37,20%	G1-G6	24,07%

Tableau 3.37 – **Classement par ordre croissant des contributions des inégalités intergroupes aux inégalités totales.**

Conclusion Générale

Tout au long de cette thèse, nous avons insisté sur les outils mis à la disposition des analystes pour évaluer les écarts de revenus, à l'intérieur comme entre les divers sous-groupes formés au sein d'une population, au cours du temps. Nous avons, ainsi, pu démontrer que l'outil de décomposition en sous-groupes est un outil utile et nécessaire aux études empiriques. En partitionnant les individus d'une population selon différents critères sociaux économiques tels que le sexe, l'âge, le niveau de qualification ou encore le statut économique, nous avons pu mettre en avant les points forts de la classe des mesures faiblement décomposables en sous-groupes avec laquelle nous avons mené des études approfondies aussi bien dans un contexte d'inégalité de revenus que dans celui de la mobilité des revenus. Au cours de nos différentes approches, nous avons cherché à obtenir des instruments de mesure les plus représentatifs possible de la réalité économique. La grande majorité des familles d'indicateurs que nous avons employées au cours de nos études englobe des indicateurs bien connus de la littérature, tels que les indices de Gini (standard et GMD), le coefficient de variation élevé au carré ou encore la mesure agrégée des changements par tête des logarithmes des revenus. Nous avons cependant montré que leurs propriétés normatives et explicatives étaient bien plus étendues que ce que leur structure usuelle pouvait laisser paraître.

Nous avons, en effet, montré que les indices de Gini ainsi que certains indices de la classe de l'entropie généralisée (tels que la variance ou le coefficient de variation élevé au carré) partageaient bien plus que de simples propriétés axiomatiques de base (telles que la normalisation, la symétrie, ou autres conditions d'invariance). L'ensemble de ces indicateurs appartient à la famille des mesures faiblement décomposables à deux paramètres, notée (α, δ)–Gini, en référence à la structure commune que partagent ces indicateurs. Cette notion de décomposition faible découle des récents travaux d'Ebert (2010) qui suggère de ne plus mesurer les inégalités entre les différents sous-groupes sur la base de leur revenu représentatif (généralement leur moyenne), mais de tenir compte de l'ensemble des écarts de revenus calculés entre les paires d'individus appartenant à des sous-groupes distincts. Une telle approche avait déjà été suggérée dans des travaux antérieurs dont nous pouvons considérer que Dagum (1997a, b) fut l'un des précurseurs. Aucune axiomatisation de ce concept de *comparaisons interpersonnelles des revenus* n'avait néanmoins été encore formellement proposée. En étudiant les fondements axiomatiques de la propriété avancée par Ebert (2010), nous avons constaté que cette propriété pouvait être généralisée sous bien des aspects.

En nous appuyant sur les travaux de Shorrocks (1980, 1984), nous avons reformulé l'expression de la propriété de décomposition faible afin que son application ne soit plus conditionnée par le respect des règles d'invariance qui régissent le comportement des indicateurs face à des chocs exogènes qui peuvent affecter la distribution des revenus. Pour cela, nous avons défini des fonctions de pondération dont la structure est proche de celle du schéma additif de Shorrocks (1980). Ces fonctions tiennent désormais compte à la fois du vecteur des tailles de population, et du vecteur des moyennes de revenus pour pondérer les niveaux d'inégalité intra- et intergroupes [voir Lasso de la Vega *et al.* (2013)]. Cette généralisation de la structure des fonctions de pondération est importante car elle nous a permis d'établir un parallèle entre les mesures additivement séparables de Shorrocks (1980) et nos mesures qui obéissent à une propriété de séparabilité plus faible. Ce résultat principalement théorique démontre que la décomposition faible peut être un aussi bon candidat que la décomposition additive pour les études empiriques. Le choix de la méthode dépend ensuite des motivations politico-économiques qui sous-tendent l'analyse. Par exemple, si un décideur politique souhaite mettre en place des transferts de revenus entre des individus de sous-groupes distincts, la méthode de décomposition faible peut être appliquée dans le but d'identifier avec précision les sous-groupes entre lesquels de telles actions redistributives sont les plus susceptibles de contribuer à une baisse des disparités.

Au-delà de son expression formelle, la décomposition en sous-groupes joue un rôle non négligeable dans l'orientation des politiques. C'est en combinant notre reformulation de la décomposition faible avec la propriété de cohérence en unités de mesures ("*unit consistency*") de Zheng (2005, 2007a, b, c) que nous avons pu proposer une caractérisation axiomatique de nos indicateurs (α, δ)–Gini. Nous avons, alors, étudié les propriétés normatives de ces indicateurs et nous avons montré que les paramètres α et δ représentent le degré d'aversion pour l'inégalité d'un décideur politique. En distinguant la valeur du paramètre α de celle du paramètre δ, nous avons montré qu'il était possible de capter différents jugements de valeurs en accord avec les idées politiques – pouvant aller de l'extrême droite à l'extrême gauche – défendues par le planificateur social. Les travaux de Kolm (1976a, b) ainsi que ceux de Zheng (2005, 2007a) suggèrent en effet que la perception des inégalités du décideur est influencée par son orientation politique. Les préférences du décideur conditionnent également ses choix en matière de redistribution. Nous avons, effectivement, pu constater qu'une même action redistributive pouvait être appréciée différemment selon l'orientation politique du décideur. Pour toutes valeurs des paramètres α et δ strictement supérieures à 2,[32] nous avons démontré que nos indicateurs (α, δ)–

32. Rappelons que par définition, le coefficient de variation élevé au carré ($\alpha = \delta = 2$) et l'indice de Gini ($\alpha = \delta = 1$) sont insensibles à ces transferts.

Gini satisfont le principe fort des transferts décroissants lorsqu'il est appliqué sur les queues des distributions [voir Mornet *et al.* (2013)]. Nous retrouvons donc l'idée qui figure dans les recommandations de l'OCDE selon laquelle, pour lutter contre les inégalités et favoriser leur diminution, les opérations redistributives doivent se concentrer sur les individus les plus démunis ou au contraire les plus aisés de la population.

Pour nos applications, nous avons privilégié les expressions des composantes intra- et intergroupes formulées par Dagum (1997a, b) qui constituent une des interprétations possible de l'axiome de décomposition faible [voir Ebert (2010), Chameni Nembua (2011, 2013) ou encore Mornet *et al.* (2014) pour une synthèse de la littérature sur les décompositions en sous-groupes]. Nous avons reparamétré les différentes composantes intra- et intergroupes de manière à ce qu'elles restent cohérentes avec la structure du (α, δ)–Gini, quelle que soit la valeur des paramètres α et δ. En prolongeant la logique d'Ebert (2010), nous avons intégré des paramètres de sensibilité à chacune des composantes intra- et intergroupes. En plus des coefficients intragroupes et intergroupes traditionnels, le schéma de décomposition suggéré par Dagum (1997a, b) fait intervenir un coefficient intergroupe supplémentaire qu'il qualifie de *distance économique directionnelle*. Inspiré des travaux de Gini (1916), cet indicateur mesure les écarts entre les distributions de deux sous-groupes distincts et fournit une évaluation de leur niveau de chevauchement (*transvariation*). Nous avons donc introduit un paramètre de sensibilité supplémentaire qui ne s'applique qu'à la structure de la distance économique directionnelle. Noté β, nous avons démontré que ce paramètre représente le degré de sensibilité aux inégalités intergroupes pures du décideur (*c.-à-d.*, observées en dehors des zones de chevauchement). Pour en arriver à une telle conclusion, nous avons étudié l'impact que différentes combinaisons de transferts (de nature intragroupe comme intergroupe) pouvaient avoir sur la structure de cet indicateur. Nous avons ainsi pu observer différents comportements selon d'une part la nature des transferts (progressifs ou régressifs) et d'autre part leur localisation (intra- ou intergroupe).

Nos résultats mettent en avant le fait que l'application de transferts progressifs intragroupes ou intergroupes n'entraîne pas systématiquement une diminution des écarts de revenus entre les individus. Des transferts de revenus opérés à la fois dans le sous-groupe des individus dont la moyenne est la plus forte et dans celui où la moyenne des revenus est plus faible, peut entraîner une contraction de la zone de chevauchement et de ce fait accroître les écarts de revenus entre les individus, tandis que des transferts intragroupes régressifs tendent à les réduire. A la lumière de ces résultats, la décomposition faible se révèle donc être un outil d'analyse politico-économique intéressant qui de plus, peut être exploité aisément.

Le niveau d'inégalité n'est cependant pas la seule préoccupation d'un décideur politique. Les mesures d'inégalités ne peuvent offrir qu'une représentation statique de la situation économique d'un pays. Des comparaisons entre les indicateurs peuvent alors être envisagées dans le temps, néanmoins de telles approches ne sont généralement pas assez précises ; les comparaisons des indicateurs ponctuels peuvent notamment entraîner des pertes d'information. Une étude de la mobilité des revenus nous a alors semblé toute indiquée pour compléter nos premières analyses. Conformément aux usages, nous avons distingué deux périodes d'étude : la période initiale et la période finale. Dans un premier temps, nous avons employé la propriété de décomposition faible d'Ebert (2010) pour étudier les inégalités de croissance ajustée au sens de Demuynck et Van de gaer (2012). Par la suite, nous avons choisi de nous concentrer sur les changements de revenus individuels, qui une fois agrégés, sont représentatifs du niveau de croissance (des revenus) au sein de la distribution. Pour évaluer l'ampleur de ces mouvements de revenus, nous avons postulé que pour juger de l'amélioration ou de la détérioration de sa situation financière, un individu compare son revenu à la période finale avec l'ensemble des revenus des individus de la période initiale. De telles comparaisons lui permettent ainsi de relativiser ses gains ou ses pertes en fonction des revenus des autres individus de sa distribution. C'est en nous basant sur ce principe que nous avons introduit la notion de *comparaisons interpersonnelles de revenus* dans un univers dynamique (bidimensionel). En adaptant le schéma de décomposition faible à un cadre bidimensionnel, nous avons pu caractériser une nouvelle famille de mesures de mouvements que nous avons présentée comme la famille des mesures interpersonnellement décomposables. Pour construire nos indicateurs, nous nous sommes appuyés sur les travaux de Fields et Ok (1996, 1999a, b). Nous avons alors, remarqué, que leur mesure agrégée des changements par tête des logarithmes des revenus était incluse dans notre famille de mesures interpersonnellement décomposables. Ce nouveau résultat apporte ainsi la preuve formelle que les familles de mesures additivement séparables et faiblement séparables ne sont pas totalement disjointes. Par ailleurs, dans le cas de la mobilité des revenus, la décomposition faible suggère une réinterprétation des mouvements de revenus qui s'opèrent entre les périodes.

Pour faciliter la mise en œuvre de cette décomposition dans les différents domaines d'études mentionnés précédemment, nous avons modifié à plusieurs reprises la macro commande Excel [voir, Mornet (2013)], initialement développée pour la décomposition de Dagum par Mussard et *al.* (2002). A l'aide de ce programme, nous avons réalisé une série d'études portant soit sur la situation économique de la France en 2005, soit sur celle de la Grande Bretagne entre 1991 et 2008. Au travers de nos applications, nous avons identifié les sous-groupes dans lesquels (ou entre lesquels) les écarts de revenus sont les plus importants, compte tenu de nos échantillons. En dépit des réformes et autres moyens d'actions déployés par le gouvernement français depuis Mai 1968 pour venir à bout des disparités entre les sexes, nous avons constaté que des inégalités de revenus entre les hommes et les femmes persistent en France pour l'année 2005. Notre outil de décomposition nous a permis d'identifier le sous-groupe des hommes âgés de 35 à 50 ans et celui des femmes âgées de 55 à 65 ans comme les sous-groupes qui génèrent le plus d'inégalité avec le reste de la population française échantillonnée. Le facteur de l'âge (ou plus largement de l'expérience professionnelle) n'est pas le seul facteur explicatif permettant de mieux appréhender cette récurrence des écarts de revenus entre les sexes observée au cours du temps. Le niveau d'éducation joue un rôle tout aussi déterminant (notamment sur le montant des rémunérations individuelles). Des écarts de revenus notables sont constatés entre les individus détenteurs d'un diplôme d'Université ou de Grandes Écoles et le reste de la société. Nos études ont également révélé que plus le degré de sensibilité pour les inégalités du décideur est élevé, plus il tend à accorder de l'importance aux écarts de revenus entretenus par le sous-groupe dont la moyenne est la plus forte (*c.-à-d.*, celui des hommes). Les actions redistributives qui seront engagées par la suite ne seront donc pas de même nature selon les préférences retenues au cours de l'analyse. Ces résultats indiquent par ailleurs que le gouvernement français doit favoriser et faciliter l'accès à l'éducation en France pour les plus démunis afin de lutter contre ces inégalités de revenus. La place des femmes sur le marché du travail doit, quant à elle, être renforcée davantage afin qu'elles puissent toutes prétendre à des postes aussi avancés que ceux des hommes et que les disparités entre les sexes se réduisent.

Dans le cas de la Grande Bretagne, nous avons souhaité adopter une approche dynamique en intégrant le facteur temps à nos études. En découpant notre période d'étude en deux afin de marquer une distinction entre les deux régimes politiques (Conservateur et Travailliste) que connaît le pays entre 1991 et 2008, nous avons, à l'aide de notre propriété de décomposition, fait clairement apparaître les mouvements de revenus de nature intergroupe. Au sein de notre échantillon, nous avons constaté une forte mobilité sociale (modification du statut économique entraîné par un changement de situation personnel). La croissance globale des revenus notée en Grande Bretagne est rendue possible car la plupart des individus (de notre échantillon) détient en 2008 un revenu supérieur à la majorité des revenus en possession du reste des individus de la société pour l'année 1991. Signe d'une progression sociale, les mouvements de revenus vont néanmoins de pair avec des inégalités de croissance ajustée relevées au sein des divers sous-groupes de notre échantillon, sur l'ensemble de la période 1991-2008. La situation familiale, au même titre que la situation économique des familles (ou plus largement des ménages) de Grande Bretagne influent fortement sur nos résultats. Les familles monoparentales ainsi que les personnes retraitées vivant seules sont les plus affectées par les inégalités de croissance. De la même façon, nous avons constaté que seules les familles en situation de plein emploi bénéficient pleinement de mouvements de croissance au sein de notre échantillon. Leur stabilité professionnelle leur offre des avantages financiers intéressants et leur assure un maintien (et parfois même un accroissement) de leurs ressources économiques, sans oublier l'influence des politiques économiques en vigueur qui encouragent le plein emploi. Le reste de la population et tout particulièrement les familles sans emploi restent assez peu concernées par des changements de revenus.

Si des liens ont pu être établis entre nos résultats et les actions/réformes orchestrées par les deux partis politiques qui se sont succédé au cours de notre période d'étude, les outils à notre disposition ne nous ont pas permis de tenir compte des préférences d'un décideur politique, dans un contexte de mobilité de revenu. La notion de transfert est pourtant bien présente dans la littérature sur la mobilité, néanmoins elle ne dessert pas les mêmes objectifs que ceux visés dans un contexte d'inégalité de revenus. Dans un cadre d'étude intragénérationnel, la notion de transfert (telle qu'elle est définie par Fields et Ok (1996, 1999a, b) par exemple) exprime un mécanisme d'échange qui s'opère entre les individus d'une même distribution. Ce mécanisme n'a pas pour but de contribuer à diminuer les écarts de revenus entre les individus mais d'expliquer pourquoi le revenu d'un individu a progressé dans le temps par rapport à celui d'un autre, tout en laissant la masse totale de revenu inchangée.[33] Il serait, néanmoins, intéressant de pouvoir tenir également compte des préférences d'un décideur dans l'appréciation des mouvements de revenus (ou plus largement de la mobilité des revenus). De la même façon, nous pouvons nous interroger sur les répercussions que pourraient avoir dans le temps la mise en place de mesures redistributives : contribueraient-elles à une augmentation des mouvements de revenus ? Cette progression des revenus serait-elle bénéfique à la croissance ? Faut-il également encourager les mouvements de revenus pour une part précise de la population ? Le bien-être individuel s'en verrait-il augmenté ? Existe-t-il une forme de dualité similaire à celle qui s'applique pour la mesure de l'inégalité, qui permettrait de mesurer les évolutions du niveau de bien-être individuel dans un contexte dynamique ?

Ce sont autant de questions qui pour l'instant sont encore sans réponse mais qui pourront faire l'objet de recherches futures afin de contribuer à améliorer la compréhension ainsi que le fonctionnement du système économique actuel.

33. Il s'agit donc d'une adaptation du principe de conservation des masses bien connu en chimie qui est adapté ici au contexte économique (« Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme » Antoine Lavoisier).

Bibliographie

[1] **Aaberge R.**, *Characterizations of Lorenz curve and income distributions*, Social Choice Welfare, (2000), Vol.17, p 639-653.

[2] ——————— , *Axiomatic Characterization of the Gini Coefficient and Lorenz Curve Orderings*, Journal of Economic Theory, (2001), Vol.101, p 115-132.

[3] ——————— , *Gini's nuclear family*, The Journal of Economic Inequality, (2007), Vol. 5, n° 3, p. 305-322.

[4] ——————— , *Ranking Intersecting Lorenz Curves*,Social Choice Welfare,(2009), Vol. 33, n° 2, p. 235-259.

[5] **Aaberge R., Björklund A., Jäntti M., Palme M., Pedersen P.J., Smith N., Wennemo T.**, *Income inequality and income mobility in the Scandinavian countries compared to the United States*, Review of Income and Wealth, (2002), Vol. 48, n°4, p. 443-469.

[6] **Abbott P., Wallace C.**, *Politique familiale et égalité des sexes*, Informations sociales, (2010), Vol. 3, n° 159, p. 46-56.

[7] **Aczél J.**, *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Academic Press, New York, (1966).

[8] **Aczél J. et Dhombres J.G.**, *Functional equations in several variables*, Vol. 31, Cambridge University Press, (1989).

[9] **Adelman I. et Levy A.**, *Decomposing Theil's Income of Income Inequality into Between and Within Components : A Note*, Review of Income and Wealth, (1984), Vol. 30, p. 119-121.

[10] ———————— , *Decomposing Theil's Index of Income Inequality : A Reply, Review of Income and Wealth*, (1986), Vol. 32, p. 107-108.

[11] **Ahluwalia M.S., Chenery H.**, *The economic framework*, *in* Redistribution with growth, Chenery H., Ahluwalia M.S., Bell C.L.G., Duloy J.H. et Jolly R ; (eds), Oxford University Press, (1974), p. 38-51.

[12] **Aldridge S., Arch A.**, *Social mobility*, In Seminar held by the Performance and Innovation Unit, London, (2001).

[13] **Alesina A., Di Tella R., MacCulloh R.**, *Inequality and happiness : are Europeans and American different ?*, Journal of Public Economics, (2004), Vol.88, p 2009-2042.

[14] **Aldridge S., Arch A.**, *Social mobility*, In Seminar held by the Performance and Innovation Unit, London, (2001).

[15] **Álvarez-García, S., Prieto-Rodriguez, J., Salas, R.**, *The evolution of income inequality in the European Union during the period 1993-1996*, Applied Economics, (2004), Vol. 36, n°13, p. 1399-1408.

[16] **Amiel Y., Cowell F. A.**, *Measurement of income inequality : Experimental test by questionnaire*, Journal of Public Economics, (1992), Vol. 47, n°1, p. 3-26.

[17] **Anand S.**, *Inequality and Poverty in Malaysia*, Published for the World Bank [by] Oxford University Press, New York, (1983).

[18] **Atkinson A.**, *On the Measurement of Inequality*, Journal of Economic Theory, (1970), Vol. 55, p. 244-263.

[19] ——————— , *The measurement of economic mobility, Social justice and public policy*, MIT Press, Cambridge, MA, (1983), Ch. 3, pp. 61-76

[20] **Atkinson A. B., Bourguignon F.**, *The comparison of multi-dimensioned distributions of economic status*, The Review of Economic Studies, (1982), Vol. 49, n°2, p. 183-201.

[21] **Atkinson A. B., Brandolini A.**, *Global World Income Inequality : Absolute, Relative or Intermediate ?*, Paper presented at the 28th General Conference of the International Association for Research in Income and Wealth, 22-28 August, Cork, Ireland, and at the 4th International Conference on the Capability Approach : Enhancing Human Security 5-7 September, Pavia, Italy, 2004.

[22] ——————— , *On analyzing the world distribution of income*, The World Bank Economic Review, (2010), p. 1-37 .

[23] **Ayala L., Sastre M.**, *What determines income mobility differences across the European Union ?*, Institute for Social and Economic Research, University of Essex, (2002).

[24] **Azuelos M.**, *Bilan économique des années Blair*, Revue Projet, (2007), Vol. 2, n° 297, p. 63-69.

[25] **Ballano C., Ruiz-Castillo J.**, *Searching by Questionnaire for the Meaning of Income Inequality*, Rev. EspanÄ Econ., (1993), Vol. 10, p. 233-259.

[26] **Bardasi, E. et al.**, British Household Panel Survey Derived Current and Annual Net Household Income Variables, Waves 1-18, 1991-2009 [computer file]. 9th Edition. University of Essex. Institute for Social and Economic Research, [original data producer(s)]. Colchester, Essex : UK Data Archive [distributor], April 2012. SN : 3909, http://dx.doi.org/10.5255/UKDA-SN-3909-2.

[27] **Barro R.J., Sala-i-Martin X.**, *Economic growth and convergence across the United States*, Working Paper No. 3419, (1990). [Published as : *Unanticipated Money, Output, and the Price Level in the United States*, Journal of Political Economy,(1978), Vol. 86, no. 4, p. 549- 580.]

[28] ——————— , *Convergence*, Journal of political Economy, (1992), Vol. 100, n°2, p. 223-251.

[29] **Bartel, A-P., Borjas G-J.**, *Wage growth and job turnover : An empirical analysis*, *in* Studies in Labor Markets,(ed. S. Rosen), NBER and University of Chicago Press, (1981), p. 65-90.

[30] **Bartholomew D.J.**, *Stochastic models for social processes*, New York : Wiley, (1967), p. 384.

[31] **Baudelot C., Establet R.**, *Allez les filles*, Editions du Seuil, Points (1992).

[32] **Blackorby C., Donaldson D.**, *Measures of relative equality and their meaning in terms of social welfare*, Journal of Economic Theory, (1978), Vol. 18, n°1, p. 59-80.

[33] ——————— , *A theoretical treatment of indices of absolute inequality*, International Economic Review, (1980), Vol. 21, n°1, p. 107-136.

[34] ——————— , *Ratio-scale and translation-scale full interpersonal comparability without domain restrictions : Admissible social-evaluation functions*, International Economic Review, (1982), Vol. 23, n° 2, p.249-268.

[35] **Blackorby C., Donaldson D., Auersperg M.**, A new procedure for the measurement of inequality within and among population subgroups, Canadian Journal of Economics, (1981), Vol. 14, n°4, p. 665-685.

[36] **Blackorby C., Primont D., Russell R.R.**, *Duality, separability, and functional structure : Theory and economic applications*, New York : North-Holland, (1978).

[37] **Ben Porath E., Gilboa I.**, *Linear Measures, the Gini Index and Income Equality trade-off*, Journal of Economic Theory, (1994), Vol. 64, p 443-467.

[38] **Besley T-J., Preston I-P.**, *Invariance and the axiomatics of income tax progression : a comment*, Bulletin of Economic Research, (1988), Vol. 40, n° 2, p. 159-163.

[39] **Bhattacharya N., Mahalanobis B.**, *Regional Disparities in Household Consumption in India*, Journal of the American Statistical Association, (1967), Vol. 62, p 143-161.

[40] Birdsall N., Graham C., *Mobility and markets : conceptual issues and policy questions*, New markets, new opportunities, (2000), p. 3-21.

[41] **Blackorby C., Bossert W. , Donaldson D.**, *Income Inequality Measurement : The Normative approach*, dans Silber J. (ed.), Handbook of income inequality measurement, Kluwer Academic Publishers, (1999), p. 133-161.

[42] **Böheim R., Jenkins S-P**, *A comparison of current and annual measures of income in the British Household Panel Survey*, Journal of Official Statistics, (2006), Vol. 22, n°4, p. 733-758.

[43] **Bosmans K.**, *Extreme Inequality aversion without separability*, Economic Theory, (2007a), Vol. 32, p 589-594.

[44] ——————— , *Comparing degrees of inequality aversion*, Soc Choice Welfare, (2007b), Vol. 29 : p 405-428.

[45] **Bosmans K., Cowell F.A.**, *The class of absolute decomposable inequality measures*, Economics letters, (2010), Vol. 109, p 154-156.

[46] **Bosmans K., Decancq K., Decoster A.**, *The Relativity of Decreasing Inequality Between Countries*, Economica, (2013), Vol. 81 n°322, p. 276-292.

[47] **Bossert W.**, *An axiomatization of the single-series Ginis*, Journal of Economic Theory, (1990), Vol. 50, n°1, p. 82-92.

[48] **Bossert W., D'Ambrosio C.**, *Reference groups and individual deprivation*, Economics letters, (2006), Vol. 90 n°3, p 421-426.

[49] **Bossert W., Pfingsten A.**, *Intermediate Inequality : Concepts, Indices and Welfare Implication*, Mathematical Social Science, (1990), Vol. 19, p. 117-134.

[50] **Bourguignon F.**, *Decomposable Inequality Measures*, Econometrica, (1979), Vol. 47, p 901-920.

[51] ———————— , *Revenu minimum et redistribution optimale des revenus : fondements théoriques*, Economie et Statistiques, (2001), n° 346-347, p 187-194.

[52] ———————— , *La Mondialisation de l'inégalité*, Seuil-La République des idées (co-éd), (2012), p. 112.

[53] **Buchinsky M., Hunt J.**, *Wage Mobility in the United States*, The Review of Economics and Statistics, (1999), Vol. 81, n°3, p. 351-368.

[54] **Budget des familles** - 2005-2006 - (2006) [fichier électronique], INSEE [producteur], Centre Maurice Halbwachs (CMH) [diffuseur].

[55] **Caille J.P. et Lemaire S.**,, *Filles et garçons face à l'orientation*, Education et Formation, n°63, DEP, (2002).

[56] **Carter L.**, *Pay mothers to stay at home*, Daily Telegraph, 2008.

[57] **Chadwick L., Solon G.**, *Intergenerational income mobility among daughters*, American Economic Review, (2002), p. 335-344.

[58] **Chakravarty S.R.**, *A note on the measurement of mobility*, Economics Letters, (1995), Vol. 48, n°1, p. 33-36.

[59] ——————, *Measuring Inequality : The Axiomatic Approach*, dans Silber J. (ed.), Handbook of Income Inequality Measurement, Kluwer Academic Publishers, (1999), p.163-186.

[60] **Chakravarty S-R., Dutta B., Weymark J-A.**, *Ethical indices of income mobility*, Social Choice and Welfare, (1985), Vol. 2, n°1, p. 1-21.

[61] **Chakravarty S-R., Tyagarupananda S.**, *The subgroup decomposable intermediate indices of inequality*, Spanish Economic Review, (2009), Vol. 11, p 83-97.

[62] **Chakravarty S-R., Chattopadhyay N., D'Ambrosio C.**, *On a family of achievement and shortfall inequality indices*, ECINEQ Working Paper Series, (2013), n° 2013-300.

[63] **Chakravarty S-R., Mukherjee D., Ranade R-R.**, *On the Family of subgroup and factor decomposable measures of multidimensional poverty*, Research on Economic Inequality, (1998), Vol. 8, p 175-194.

[64] **Chameni Nembua C.**, *Linking Gini to Entropy : Measuring Inequality by an interpersonal class of indices*, Economics Bulletin, (2006a), Vol. 4, No. 5 : p 1-9.

[65] ——————, *A note on the decomposition of the coefficient of variation squared : comparing entropy and Dagum's methods*, Economics Bulletin, (2006b), Vol. 4, n° 5, p. 1-9.

[66] ——————, *The multi-decomposition of the Hirschman-Herfindahl index : measuring household inequality in Cameroon, 1996-2001*, *Applied Economics Letters*, (2007), Vol. 4, n° 8, p 1-8.

[67] ——————, *A generalization of the Gini coefficient : Measuring economic inequality*, *Mimeo*, (2011).

[68] ——————— , *Measuring and Explaining Economic Inequality : An Extension of the Gini Coefficient*, *in* Econometric Methods for Analyzing Economic Development, *by* Schaeffer P.V. (Ed.), IGI Global, (2013), Chap. 6, p. 87.

[69] **Chateauneuf A., Gajdos T., Wilthien P-H.**, *The Principle of Strong Diminishing Transfer*, Journal of Economic Theory ,(2002), Vol. 103, n° 2, p. 311-333.

[70] **Chen W. H.**, *Cross-National Differences in Income Mobility : Evidence from Canada, the United States, Great Britain and Germany*, Review of Income and Wealth, (2009), Vol. 55, n°1, p. 75-100.

[71] **Clark A.E., Frijters P., Shields M.A.**, *Relative income, happiness, and utility : An explanation for the Easterlin paradox and other puzzles*, Journal of Economic Literature, (2008), Vol. 46, n° 1, p. 95-144.

[72] **Cowell F.A.**, *Generalized entropy and the Measurement of Distributional Change*, European Economics Review, (1980a), Vol. 13, p. 147-159.

[73] ——————— , *On the Structure of Additive Inequality Measures*, Review of Economics Studies, (1980b), Vol. 47, p. 521-531.

[74] ——————— , *Multilevel decomposition of Theil's index of inequality*, Rev. Income Wealth, (1985a), p. 201-205.

[75] ——————— , *Measures of distributional change : An axiomatic approach*, The review of economic studies, (1985b), Vol. 52, n°1, p. 135-151.

[76] ——————— , *Sampling variance and decomposable inequality measures*, Journal of Econometrics, (1989), Vol. 42, p. 27-41.

[77] ——————— , *Measurement of inequality*, *in* Handbook of income distribution, (1989), Vol. 1, p. 87-166.

[78] **Cowell F.A., Fiorio C.V.**, *Inequality decompositions–a reconciliation*, Journal of Economic Inequality, (2011), Vol. 9, p. 509-528.

[79] **Cowell F.A., Flachaire E.**, *Inequality with Ordinal Data*, XXIXèmes Journées de Microéconomie Appliquée, BREST,(2012).

[80] **Cowell F.A., Kuga K.**, *Inequality measures and the integrability problem*, University of Keele discussion paper n° 11, (1976).

[81] ———————— , *Additivity and the entropy concept : An axiomatic approach to inequality measurement*, Institute of Social and Economic Research discussion paper n° 96, (1977).

[82] Cowell F.A., Schluter C., *Income mobility : A robust approach*, Distributional Analysis Discussion Paper, 37, STICERD, LSE, Houghton St., London, WC2A 2AE (1998).

[83] **D'Agostino M., Dardanoni V.**, *What's so special about Euclidean distance ?*, Social Choice and Welfare, (2009), Vol. 33, n°2, p. 211-233.

[84] **Dagum C.**, *Inequality Measures Between Income Distributions with Applications*, Econometrica, (1980), Vol. 48, n°7, p. 1791-1803.

[85] ———————— , *Measuring the Economic Affluence Between Populations of Income Receivers*, Journal of Business and Economic Statistics, (1987), Vol. 5, n° 1, p. 5-12.

[86] ———————— , *A New Approach to the Decomposition of Gini Income Inequality Ratio*, Empirical Economics, (1997a), Vol. 22, n°4, p. 515-531.

[87] ———————— , *Decomposition and Interpretation of Gini and the Generalized Entropy Inequality Meausres*, Proceeding of the American Statistical Association, Business and Economic Statistic Section, 157^{th} Meeting, (1997b), p. 200-205.

[88] **Dalton H.**, *The Measurement of Inequality of Incomes*, Economic Journal, (1920), Vol. 30, p. 348-361.

[89] **Dardanoni V.**, *Measuring social mobility*, Journal of Economic Theory, (1993), Vol. 61, n°2, p. 372-394.

[90] **Demuynck T., Van de Gaer D.**, *Inequality adjusted income growth*, Economica, (2012), Vol. 79, n° 316, p. 747-765.

[91] **Donaldson D., Weymark J.A.**, *A single-parameter generalization of the Gini indices of inequality*, Journal of Economic Theory, (1980), Vol. 22 n°1, p. 67-86.

[92] **Davies J. B., Hoy M.**, *The Normative Significance of Using Third-Degree Stochastic Dominance in Comparing Income Distributions*, Journal of Economic Theory, (1994), Vol. 64, p. 520-530.

[93] **Debreu G.**, *The theory of value*, Wiley, New York, (1959).

[94] **Decancq K., Lugo M.A.**, *Weights in Multidimensional Indices of well-being : An overview*, Econometric Reviews, (2013), Vol. 31 n°1, p. 7-34.

[95] ——————— , *Inequality of well-being : A multidimensional approach*, Economica, (2012), Vol. 79, p. 721-746.

[96] **del Rio C., Alonso-Villar O.**, *New unit-consistent intermediate inequality indices*, Economic Theory, (2010), Vol. 42, p 505-521.

[97] **del Rio C., Ruiz-Castillo J.**, *Intermediate inequality and welfare*, Social Choice and Welfare, (2000), Vol. 17, p. 223-239.

[98] Department for Work and Pensions, *Households Below Average Income 1994/5-2009/10*, Corporate Document Services, Leeds, (2011).

[99] **Deutsch J. et Silber J.**, *Gini's 'Transvariazione' and the Measurement of Distance Between Distributions*, Empirical Economics, (1997), Vol. 22, p. 547-554.

[100] ———————— , *Inequality Decomposition by Population Subgroups and the Analysis of Interdistributional Inequality*, dans Silber J. (ed.), Handbook of Income Inequality Measurement, Kluwer Academic Publishers, (1999), p. 163-186.

[101] **Dickens R.**, *Caught in a Trap ? Wage Mobility in Great Britain : 1975-1994*, Economica, (2000), Vol. 67, p. 477-497.

[102] **Dièz H., Lasso de la Vega C., Urrutia A.M.**, *Unit-Consistent Aggregative Multidimensional Inequality Measures : A Characterization*, ECINEQ Working Paper Series, (2007), n° 2007-66.

[103] ———————— , *Multidimensional Unit- and Subgroup-Consistent Inequality and Poverty Measures : Some Characterization*, Research on Economic Inequality,(2008), Vol. 16, p. 189-211.

[104] **Donaldson D., Weymark J.A.**, *Ethically flexible Gini indices for income distributions in the continuum*, Journal of Economic Theory, (1983), Vol. 29, n°2, p. 353-358.

[105] **Dupont G.**, *Les retraites au Royaume-Uni : synthèse, OFCE*, Conseil d'orientation des retraites, séance plénière du 13 novembre 2003 : *Réforme du système de retraite au Royaume-Uni et aux Etats-Unis ; droit à l'information des assurés*, (2003a). http://www.cor-retraites.fr/IMG/pdf/doc-308.pdf

[106] **Dupont G.**, *Retraites au Royaume-Uni : contexte, enjeux, réformes*, Conseil d'Orientation des Retraites, (2003b).

[107] **Ebert U.**, *Measures of Distance Between Income Distributions*, Journal of Economic Theory, (1984), Vol. 32, p. 266-274.

[108] ———————— , *On the Decomposition of Inequality : Partitions into Non-overlapping Subgroups*, dans Eichorn W. (ed.), Measurement In Economics. New-York : Physica Verlag, (1988), p. 399-412.

[109] ———————— , *The decomposition of inequality reconsidered : Weakly decomposable measures*, Mathematical Social Sciences, (2010), Vol. 60, n°2, p. 94-103.

[110] **Ebert U., Moyes P.**, *An axiomatic characterization of Yitzhaki's index of individual deprivation*, Economics letters, (2000), Vol. 68, p. 263-270.

[111] **Elbers C., Lanjouw P., Mistiaen J-A., Özler B.**, *Reinterpreting between-group inequality*, Journal of Economic Inequality, (2008), Vol. 6, p. 231-245.

[112] Elster J., *Envy in social life, Strategy and Choice*, Cambridge, Mass. : The MIT Press, (1991), p. 49-82.

[113] **Essama-Nssah B.**, *Inégalité, pauvreté et bien-être social : fondements analytiques et normatifs*, De Boeck (ed.), Ouvertures Economiques.Série Balises, (2000).

[114] **Esteban J-M.**, *Un anàlisis de la polarizaciòn de la renta provincial en España, 1955-1993*, Moneda y Credito, (2000).

[115] **Fei J-C-H, Fields G.**, *On Inequality Comparisons*, Econometrica, (1978), Vol. 46, p. 303-316.

[116] **Fields G-S.**, *Income Mobility : Concepts and Measures*, *in* New markets, new opportunities ? : Economic and social mobility in a changing world, Birdsall N. & Graham C. (Eds.), (2000), Brookings Institution Press.

[117] ———————— , *Income mobility*, *in* L. Blume & S. Durlauf (Eds.), The new Palgrave dictionary of economics, New York, NY : Palgrave Macmillan, (2008), Electronic version from Cornell University.

[118] **Fields G-S., Ok E-A.**, *The meaning and measurement of income mobility*, Journal of Economic Theory, (1996), Vol. 71, n°2, p. 349-377.

[119] ———————— , *The measurement of income mobility : an introduction to the literature*, Springer Netherlands,(1999a), p. 557-598.

[120] ———————— , *Measuring movement of incomes*, Economica, (1999b), Vol. 66, n°264, p. 455-471.

[121] **Fishburn P-C., Willig R-D.**, *Transfer principles in income redistribution*, *Journal of Public Economics*, (1984), Vol. 25, p. 323-328.

[122] **Fishlow A.**, *Brazilian Size Distribution of Income*, American Economic Review, Papers and Proceedings, (1972), Vol. 62, p. 381-402.

[123] **Foster J-E.**, *An axiomatic characterization of the Theil measure of income inequality*, Journal of Economic Theory, (1983), Vol. 31, n°1, p. 105-121.

[124] **Foster J-E., Schneyerov A-A.**, *A general class of additively decomposable inequality measures*, Economic Theory, (1999), Vol.14, p. 89-111.

[125] ———————— , *Path Independent Inequality Measures*, Journal of Economic Theory, (2000), Vol.91, p. 199-222.

[126] **Foster J-E., Shorrocks A-F.**, *Inequality and poverty orderings*, European Economic Review, (1988), Vol. 32, n°2, p. 654-661.

[127] ———————— , *Subgroup consistent Poverty indices*, Econometrica, (1991), Vol.59, n°3, p. 687-709.

[128] **Foster J., Greer J., Thorbecke E.**, *A class of decomposable poverty measures*, Econometrica : Journal of the Econometric Society, (1984), p. 761-766.

[129] **Frick J-R., Grabka, M-M., Groh-Samberg O.**, *Dealing with Incomplete Household Panel Data in Inequality Research*, SOEP Papers on Multidisciplinary Panel Data Research at DIW Berlin n° 290, (2009).

[130] **Fukushige M., Kakamu K.**, *Multilevel decomposition methods for income inequality measures*, Japanese Economic Review, (2009), Vol. 60, n° 3, p. 333-344.

[131] **Gini C.**, *Measurement of Inequality of Incomes*, The Economic Journal, (1921), p. 124-126.

[132] —————— , *Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni, Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, dans Gini C. (ed.), (1959), p. 21-44.

[133] **Gajdos T.**, *Les fondements axiomatiques de la mesure des inégalités*, Cahier de Recherche 01-01, (2001).

[134] —————— , *Measuring Inequalities without Linearity in Envy : Choquet Integrals for Symmetric Capacities*, Journal of Economic Theory, (2002), Vol. 106, p. 190-200.

[135] **Gajdos T., Weymark J.A.**, *Multidimensional generalized Gini indices*, Economic Theory, (2005), Vol. 26, p. 471-496.

[136] **Geweke J., Marshall R.C., Zarkin G.A.**, *Mobility indices in continuous time Markov chains*, Econometrica : Journal of the Econometric Society, (1986), p. 1407-1423.

[137] **Giorgio G.M.**, *The Gini inequality decomposition : An evolutionary study*, dans The measurement of individual well-being and group inequalities : essays in memory of Z. M. Berrebi, London, (2010), p. 185-218 .

[138] **Gorman W.M.**, *Separable utility and Aggregation*, Econometrica, (1959), Vol. 27, n°3, p. 469-481.

[139] —————— , *The structure of Utility functions, The Review of Economic Studies*, (1968), Vol. 35, n°4, p. 367-390.

[140] **Grosfeld I., Senik C.**, *La montée de l'aversion à l'inégalité. Du temps des anticipations au temps de la déception*, Revue économique, (2009), Vol.60, p. 749-758.

[141] **Gruen C., Klasen S.**, *Growth, inequality, and welfare : comparisons across space and time*, Oxford Economic Papers, (2008), Vol. 60, n°2, p. 212-236

[142] **Hardy G.H., Littlewood J.E., Polyà G.**, *Inequalities*, Cambridge, Cambridge University Press, (1934).

[143] **Harrison E., Seidl C.**, *Perceptional inequality and preferential judgements : An empirical examination of distributional axioms*, Public Choice, (1994), Vol. 79, n°1-2, p. 61-81.

[144] **Hart P-E.**, *The comparative statics and dynamics of income distributions*, Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General), (1976), p. 108-125.

[145] **Holmlund B.**, *Job mobility and wage growth : a study of selection rules and rewards*, Springer Berlin Heidelberg, (1984), p. 238-260.

[146] **Jäntti, M., Jenkins, S.P**, *Income Mobility*, IZA Discussion Paper Series DP n° 7730,(2013), (forthcoming in Handbook of income distribution (Vol. 2)).

[147] **Jenkins S.P.**, *The British Household Panel Survey and its income data*, ISER Working Paper 2010-33, (2010a). Une autre version est publiée comme Chapitre 4 de Jenkins (2011).

[148] ——————, *Changing fortunes : income mobility and poverty dynamics in Britain*, Oxford University Press, (2011).

[149] **Jenkins S.P., Levy H.**, *Documentation for Derived Current and Annual Net Household Income Variables, BHPS waves 1-18*, UK Data Archive Study Number 3909, (2012).

[150] **Jenkins, S. P., Van Kerm, P.**, *Trends in individual income growth : measurement methods and British evidence*, Discussion paper series n° 5510, Forschungsinstitut zur Zukunft der Arbeit, (2011).

[151] **Klasen S.**, *Growth and well-being : introducing distribution-weighted growth rates to reevaluate US post-war economic performance*, Review of Income and Wealth, (1994), Vol. 40, n°3, p. 251-272.

[152] **Kolm S-C.**, *Unequal Inequalities I*, Journal of Economic Theory, (1976a), Vol. 12, p. 416-442.

[153] ——————— , *Unequal Inequalities II*, Journal of Economic Theory, (1976b), Vol. 13,p. 82-111.

[154] ——————— , *The rational foundations of income inequality measurement*, In Handbook of income inequality measurement, Springer Netherlands, (1999), p. 19-100.

[155] **Koshevoy G-A., Mosler K.**, *Multivariate Gini Indices*, Seminar of Economic and social statistics university of Cologne, (1995), n° 7.

[156] **Koubi M., Mussard S., Seyte F., Terraza M.**, *La hierarchie des salaires dans le secteur privé : permanences et évolutions*,Document de travail LAMETA DT 2003-21, (2003).

[157] ——————— , *Evolution des inégalités salariales en France entre 1976 et 2000 : une étude par la décomposition de l'indicateur de Gini*, Economie et Prévision, (2005), p. 139-169.

[158] **Krtscha M.**, *A new compromise measure of inequality*, In Models and measurement of welfare and inequality, Springer Berlin Heidelberg, (1994), p. 111-119.

[159] **Krueger, A.**, *The rise and consequences of inequality. Presentation made to the Center for American Progress*, January 12th, (2012). Lien.

[160] **Lambert P-J.**, *The distribution and redistribution of income*, Manchester University Press, (2001).

[161] **Lambert P-J., Aronson R-J.**, *Inequality Decomposition Analysis and the Gini Coefficient Revisited*, The Economic Journal, (1993), Vol. 103, p. 1221-1227.

[162] **Lambert P-J., Decoster A.**, *The Gini coefficient reveals more*, Disponible sur SSRN 809004, (2005).

[163] **Lasso de la Vega C., Goerlich F.J., Urrutia A.M.**, *Generalizing the $S-$Gini family-some properties-*, Working paper, (2009), Ivie. WP-AD 2009-16.

[164] ——————, *Characterizing how to aggregate the individuals' deprivations in a multidimentional framework*, Journal of Economic Inequality, (2011), Vol. 9, p. 183-194.

[165] **Lasso de la Vega C., Mornet P., Mussard S.**, More about Weakly Decomposable Inequality Measures, 5th ECINEQ Conference, (2013), Bari.

[166] **Lasso de la Vega C., Urrutia A-M., Dièz H.**, Unit consistency and Bipolarization of income distributions, Review of Income and Wealth, (2010), Vol. 6 n° 1, p. 65-83.

[167] **Lasso de la Vega C., Urrutia A-M., Volij O.**, An axiomatic characterization of the Theil inequality order, Discussion paper, (2011), n° 11-03.

[168] **Lerman R.I., Yitzhaki S.**, *Income Stratification and Income Inequality*, Review of Income and Wealth, (1991), Vol. 37, n° 3, p. 313-329.

[169] ——————, *Income inequality effects by income sources : A new approach and applications to the United states*, The Review of Economics and Statistics, (2001), p. 151-155.

[170] **Lorenz M. O.**, *Methods for Measuring Concentration of Wealth, Journal of the American Statistical Association*, (1905), Vol. 70, p. 209-219.

[171] **Maasoumi E.**, *On mobility*, Statistics Textbooks and Monographs, (1998), Vol. 155, p. 119-176.

[172] **Maasoumi E., Zandvakili S.**, *A Class of Generalized Measures of Mobility with Applications*, Economics Letters, (1986), Vol. 22, p. 97-102.

[173] **Magdalou B., Nock R.**, *Income distributions and decomposable divergence measures*, Journal of Economic Theory, (2011), Vol. 146, p. 2440-2454.

[174] **Mainguené A.**, *Couple, famille, parentalité, travail des femmes. Les modèles évoluent avec les générations*, Insee Première, (2011), n°1339, http://www.insee.fr/fr/ffc/ipweb/ip1339/ip1339.pdf.

[175] **Makdissi P., Mussard S.**, *Analyzing the impact of indirect tax reforms on rank-dependent social welfare functions : a positional dominance approach*, Social Choice Welfare, (2008), Vol. 30, n°8, p. 385-399.

[176] **Makdissi P., Wodon Q.**, *Gini Decomposition and Gini Income Elasticity Under Income Variability*, Bulletin of Economic Research, (2012), Vol. 64, n° 2, p. 184-191.

[177] **Marchant T.,**, *Scale invariance and similar invariance conditions for bankruptcy problems*, Social Choice and Welfare, (2008), Vol. 31, p. 693-707.

[178] **Marder J., Müller K., Hawryluk A., Pearson G.**, *Excel-to-LaTeX - Convert Excel spread-sheets to LaTeX tables*, Programme en accès libre, 1996-2012.

[179] **Markandya A.**, *The welfare measurement of changes in economic mobility*, Economica, (1984), Vol. 51, n°204, p. 457-71.

[180] **Marshall A. W., Olkin I.**, *Inequalities : Theory of Majorization and its Applications*, Academic Press, New York, (1979).

[181] **Mehran F.**, *Linear Measures of Income Inequality*, Econometrica, (1976), Vol. 44, n°4, p. 805-809.

[182] **Mincer J., Jovanovic B.**, *Labor mobility and wages*, *in* Studies in Labor Markets, (ed. S. Rosen), NBER and University of Chicago Press, (1982), p. 21-63.

[183] **Mitra T., Ok E.A.**, *The measurement of income mobility : A partial ordering approach*, Economic Theory, (1998), Vol. 12, n°1, p. 77-102.

[184] **Mookherjee D., Shorrocks A.**, *A Decomposition Analysis of the Trend in UK Income Inequality*, The Economic Journal, (1982), Vol. 92, p. 886-902.

[185] **Morduch J., Sicular T.**, *Rethinking inequality decomposition, with evidence from rural China*, The Economic Journal, (2002), Vol. 112, n° 476, p. 93-106.

[186] **Mornet P.**, *A program for weakly decomposable inequality measures by population subgroups*, Economics Bulletin, (2013), Vol. 33, n°3, p. 1738-1750.

[187] **Mornet P., Seyte F., Terraza M.**, *L'influence du degré d'aversion à l'inégalité du décideur sur sa perception des inégalités intragroupes et intergroupes : une application de l'alpha décomposition aux salaires de la France entre 1995 et 2005*, LAMETA Working Paper, (2012), DR n°2012-19.

[188] **Mornet P., Mussard S., Seyte F., Terraza M.**, *La décomposition de l'indicateur de Gini en sous-groupes de 1967 à nos jours : Une revue de la littérature revisitée et complétée*, LAMETA Etudes et Synthèses, (2013), ES n°2013-01.

[189] **Mornet P., Mussard S., Seyte F., Terraza M.**, *La décomposition de l'indicateur de Gini en sous-groupes*, Revue Française d'Economie, (2014), Vol. XXIX, n°2, p. 11-75.

[190] **Mornet P., Zoli C., Mussard S., Sadefo-Kamdem J., Seyte F., Terraza M.**, *The $(\alpha,\beta)-$multi-level $\alpha-$Gini decomposition with an illustration to income inequality in France in 2005*, Economic Modelling, (2013), Vol. 35, Special issue in Memory of Bernard Philippe, p. 944-963.

[191] **Morrisson C.**, *Les inégalités de revenu*, Presses Universitaires de France, (1986).

[192] **Mougel F-C.**, *Royaume-Uni, les années Blair*, Les Études de la Documentation française, (2005), n°5221.

[193] **Moyes P.**, *Dominance, relative ou absolue, au sens de Lorenz. Une comparaison internationale*, Revue Economique, (1992), Vol. 43, n°5, p. 895-914.

[194] **Mukhopadhaya P.**, *Efficiency Criteria and Sen-type Social Welfare function*, Working Paper, (2001), n°0114 (National University of Singapore).

[195] **Mussard S.**, *Décompositions multidimensionnelles du rapport moyen de Gini : applications aux revenus italiens de 1989 et 2000*, 533 p., Thèse de doctorat : Sciences économiques : Montpellier 1 : (2004).

[196] ——————— , *Une réconciliation entre la décomposition en sous-groupes et la décomposition en sources de revenu de l'indice de Gini-La multi-décomposition de l'indicateur de Gini*, Annales d'Economie et de Statistiques, (2006), Vol. 81, p. 1-25.

[197] ——————— , *Between-Group Pigou-Dalton Transfers*, Cahier de recherche/Working Paper, (2007), Vol. 7, p. 0-9.

[198] **Mussard S., Pi ALperin M.N., Seyte F., Terraza M.**, *Extension de la décomposition de l'indice de Gini de Dagum : La multi-décomposition paramétrique*, 54^{e} Congrès de l'association des économistes de langue française, Aix-en-Provence, (2005).

[199] —————— , *Extensions of Dagum's Gini Decomposition, Statistica & Applicazioni*, (2006), Vol. IV, volume spécial n°2, p. 5-30.

[200] —————— ,*Extension de la décomposition de l'indice de Gini de Dagum : La multi-décomposition paramétrique et non paramétrique*,Working Paper Comparative Research on Household panel studies CEPS/INSTAED Luxembourg, (2007), n° 17.

[201] **Mussard S., Seyte F., Terraza M.**, *Program for Dagum's Gini Index Decomposition*,(2002), http://www.lameta.univ-montp1.fr/online/gini.html.

[202] —————— , *http ://www.lameta.univ-montp1.fr/online/gini.html : Décomposition de l'indicateur de Gini et des mesures dérivées de l'entropie*, Document de travail LAMETA, (2002c), n°24.

[203] —————— , *Note sur l'utilisation de l'indice multidimensionnel de Gini appliqué a une analyse des inégalités salariales en Languedoc Roussillon en* 1996, Note de Recherche, (2004), p. 125-134.

[204] —————— , *La décomposition de l'indicateur de Gini en sous-groupes : Une revue de littérature*, Working Paper Gredi Uiversité de Sherbrooke, (2006), n°11.

[205] **Mussard S., Terraza M.**, *Décompositions des mesures d'inégalité : le cas des coefficients de Gini et d'entropie*, Recherches économiques de Louvain, (2009), Vol.75, n°2, p. 151-181.

[206] **Mussard S., Terraza V.**, *Méthodes de décomposition de la volatilité d'un portefeuille : une nouvelle approche d'estimation des risques par l'indice de Gini*, Revue d'Economie Politique, (2004), Vol. 114, n° 4, p. 557-571.

[207] **OECD**, *Economic Policy Reforms : Going for Growth 2010*, (2010).

[208] **OECD**, *Focus on Inequality and Growth*, December 2014, (2014).

[209] **Okamoto M.**, *Decomposition of Gini and Multivariate Gini Indices*, The Journal of Economic Inequality, (2009), Vol. 7, n°2, p. 153-177.

[210] **Palmisano F., Van de gaer D.**, *History dependent growth incidence : A characterisation and an application to the economic crisis in Italy*, ECINEQ WP 2013- 314, (2013).

[211] **Pareto V.**, *Ecrits sur la courbe de la répartition de la richesse*, Oeuvres complètes de Vilfredo Pareto publiées sous la direction de Giovanni Busino, Genève : Librairie Droz, écrits en 1896, pubilé en 1965.

[212] **Pattanaik P.K., Reddy S.G., Xu Y.**, *On procedures for measuring deprivation and living standards of societies in a multi-attribute framework*, Working Paper, (2008), n°2.

[213] **Pfingsten A.**, *Distributionally-neutral tax changes for different inequality concepts*, Journal of Public Economics, (1986), Vol. 30, n°3, p. 385-393.

[214] ——————— , *Empirical investigation of inequality concept : A method and first results*, Karlsruhe University, (1988).

[215] **Pigou A.C.**, *Wealth and welfare*, Macmillan, London,(1912).

[216] **Piketty T.**, L'économie des inégalités, La Decouverte (6^{eme} ed.), Paris, Collection Repères, (2008).

[217] **Pyatt G.**, *On the Interpretation and Dissaggregation of Gini Coefficients*, Economic Journal, (1976), Vol. 86, p. 243-250.

[218] **Quiggin J.**, *A theory of anticipated utility*, Journal of Economic Behavior & Organization, (1982), Vol. 3, n°4, p. 323-343.

[219] **Ramos X.**, *Anatomy of earnings mobility in Britain : Evidence from the BHPS, 1991-1995*, ESRC Research Centre on Micro-Social Change, University of Essex, (1999).

[220] **Ravallion M.**, *Targeted transfers in poor countries : revisiting the tradeoffs and policy options*, World Bank Publications, (2003),Vol. 3048.

[221] **Rawls J.** , *Theory of Justice*, Cambridge Harvard University Press, trad. française Paris, Seuil, 1987.

[222] **Roemer J.E.**, *Equal opportunity and intergenerational mobility : going beyond intergenerational income transition matrices*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (2004), p. 48-57.

[223] **Rosenwald F.**, *Filles et garçons dans le système éducatif depuis vingt ans*, Données sociales : La société française - Édition 2006 (Insee), (2006).

[224] **Rousseau J.J.**, *Discours Sur L'Origine et les Fondements de L'Inegalite parmi les Hommes*, Amsterdam, Dt. : Schriften zur Kulturkritik. *Ü*ber Kunst und Wissenschaft, (1755).

[225] **Ruiz-Castillo J.**, *The measurement of structural and exchange income mobility*, The Journal of Economic Inequality, (2004), Vol. 2, n°3, p. 219-228.

[226] **Sala-i-Martin X.**, *The classical approach to convergence analysis*, The Economic Journal, (1996), Vol. 106, p. 1019-1036.

[227] **Salas R.**, *Multilevel Interterritorial Convergence and Additive Multidimensional Inequality Decomposition*, Social Choice and Welfare, (2002), Vol. 19, p. 207-218.

[228] **Savaglio E.**, *Multidimensional inequality with variable population size*, Economic Theory, (2006), Vol. 28, p. 85-94.

[229] **Savaglio E.**, *On multidimensional inequality with variable distribution mean*, Journal of Mathematics Economics, (2011), Vol. 47, p. 453-461.

[230] **Schiller B.R.**, *Relative earnings mobility in the United States*, The American Economic Review, (1977), Vol. 67, n° 5, p. 926-941.

[231] **Schluter C., Van de gaer D.**, *Upward structural mobility, exchange mobility, and subgroup consistent mobility measurement : US-German mobility rankings revisited*, Review of Income and Wealth, (2011), Vol. 57, n°1, p. 1-22.

[232] **Schmid F.**, *Decomposition of Inequality Measures : Theory and Empirical Application*, In W. Eichhorn (éd), Models and Measurement of Welfare and Inequality, (1994), Heidelberg : Springer-Verlag, p. 176-192.

[233] **Schur I.**, *Über eine Klasse von Mittlebildungen mit Anwendungen auf der Determinantentheorie*, Sitzungsber. Berliner Mat. Ges., (1923), Vol.22, p. 9-29.

[234] **Seidl C., Pfingsten A.**, *Ray invariant inequality measures*, In S. Zandvakili (ed.), Research on Economic Inequality, Vol. 7, Greenwich, Conn. : JAI Press, p. 107-29.

[235] **Seidl C., Theilen B.**, *Stochastic independence of distributional attitudes and social status : a comparison of German and Polish data*, European Journal of Political Economy, (1994), Vol. 10, n°2, p. 295-310.

[236] **Sen A.**, *On Economic Inequality*, Clarendon Press, Oxford, (1973).

[237] ―――――――― , *Repenser l'inégalité*, Seuil (ed.), Traduit de l'anglais par Paul Chemla, (2000).

[238] **Seyte F.**, *La mesure des inégalités*, Habilitation à diriger les recherches, Université Montpellier I, (2004).

[239] **Shalit H., Yitzhaki S.**, *Mean Gini, Portofolio Theory, and the Pricing of Risky Assets*, The Journal of Finance, (1984), Vol. XXXIX, n°5, p. 1449-1468.

[240] **Silber J.**, Factor Components, Population Subgroups and the Computation of the Gini Index of Inequality, Review of Economics and Statistics, (1989), Vol. 71, p. 107-115.

[241] **Shorrocks A.F.**, *Income inequality and income mobility*, Journal of Economic Theory, (1978a), Vol. 19, n° 2, p. 376-393.

[242] ——————,*The measurement of mobility*, Econometrica : Journal of the Econometric Society, (1978b), p. 1013-1024.

[243] ——————, *The Class of Additively Decomposable Inequality Measures*, Econometrica, (1980), Vol. 48 n°3, p. 613-625.

[244] —————— , *On the Distance Between Income Distributions*, Econometrica, (1982), Vol. 50, p. 1337-1339.

[245] —————— , *Inequality Decomposition by Population Subgroups*, Econometrica, (1984), Vol. 52, p. 1369-1386.

[246] —————— , *Aggregation Issues in Inequality Measurement*, *in* W. Heichhorn, ed., Measurement in Economics, New York, Physica-Verlag, (1988), p. 429-452.

[247] —————— , *On the Hart measure of income mobility*, Institute for Social and Economic Research, (1993), n°20.

[248] —————— , *Decomposition Procedures for Distributional Analysis : A Unified Framework Based on the Shapley Value*, Tech. rep., Mimeo, (1999).

[249] —————— , *Decomposition Procedures for Distributional Analysis : A Unified Framework Based on the Shapley Value*, Journal of Economic Inequality,(2013), Vol. 11 n°1, p. 99-126.

[250] **Solon G.**, *Intergenerational income mobility in the United States*, The American Economic Review, (1992), p. 393-408.

[251] **Soltow L.**, *The Distribution of Income Related to Changes in the Distribution of Education, Age and Occupation*, Review of Economics and Statistics, (1960), Vol. 42, p. 450-453.

[252] **Swift A.**, *Political Philosophy, A Beginners guide for Students and Politicians*, Polity Press,(2014), third Edition.

[253] **Taylor M-P.**, *Earnings, independence or unemployment : Why become self-employed ?*, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, (1996), Vol. 58, n°2, p. 253-266.

[254] **Taylor M-F.(ed). with Brice J., Buck N. and Prentice-Lane E.**, *British Household Panel Survey User Manual Volume A : Introduction, Technical Report and Appendices*, Colchester : University of Essex, (2010).

[255] **Theil H.**, *Economics and Information Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, (1967).

[256] **Thomson W.**, *Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems : a survey*, Mathematical Social Sciences, (2003), Vol. 45, n°3, p. 249-297.

[257] **Thon D.**, *An axiomatization of the Gini coefficient*, Mathematical Social Sciences, (1982), Vol. 2, n°2, p. 131-143.

[258] **Trannoy A.**, *Egalitarisme de la dominance et utilitarisme*, Revue économique, (1999), Vol. 50, n° 4, p. 733-755.

[259] ———————— , *Mesure des inégalités et dominance sociale : Un chassé-croisé entre économiste et mathématiciens*, , Mathématiques et sciences humaines [En ligne], 192, Hiver 2010, mis en ligne le 31 mars 2011, consulté le 01 septembre 2012. http://msh.revues.org/11904

[260] **Trentmann F.**, *Grande-Bretagne : une unité menacée*, Constructif, (2012), n° 23. Lien.

[261] **Tsui K.Y.**, *Multidimensional inequality and multidimensional generalized entropy measures : An axiomatic derivation*, Social Choice Welfare, (1999), Vol. 16, p. 145-157.

[262] **Tsui K-Y.**, *Measurement of income mobility : A re-examination*, Social Choice and Welfare, (2009), Vol. 33, n°4, p. 629-645.

[263] **University of Essex**. Institute for Social and Economic Research, British Household Panel Survey : Waves 1-18, 1991-2009 [computer file]. 7th Edition. Colchester, Essex : UK Data Archive [distributor], July 2010. SN : 5151.

[264] **Van Kerm P.**, *What lies behind income mobility ?, Reranking and distributional change in Belgium, Western Germany and the USA*, Economica, (2004), Vol. 71, n°282, p. 223-239.

[265] **Wodon Q.**, *Between group Inequality and targeted Transfers*, Review of Income and Wealth, (1999), Vol. 41, n°1, p. 21-40.

[266] ———————— , *Income mobility and risk during the business cycle : Comparing adjustments in labour markets in two Latin-American countries*, Economics of Transition, (2001), Vol. 9, n°2, p. 449-461.

[267] **Xu K.**, *How has the literature on Gini Index Evolved in the Past 80 years ?*, China Economic Quarterly, (2004), Vol. 2, p. 757-778.

[268] **Yaari M.E.**, *The Dual Theory of Choice under Risk*, Econometrica, (1987), Vol. 55, n° 1, p. 95-115.

[269] **Yeandle S.**, *Policy for a Change : Local Labour Market Analysis and Gender Equality*, Cambridge University Press, (2009).

[270] **Yitzhaki S.**, *On an Extension of the Gini Inequality Index*, International Economic Review, (1983), Vol. 24, n°3, p. 617-628.

[271] ———————— , *Economic Distance and Overlapping of Distributions*, Journal of Econometrics, (1994), Vol. 61, p. 147-159.

[272] ———————— , *More than a Dozen Alternative Ways of Spelling Gini*, Research on Economic Inequality, (1998), Vol. 8, p. 13-30.

[273] **Yitzhaki S., Wodon Q.**, *Mobility, inequality, and horizontal equity*, Research on Economic Inequality, (2004), Vol. 12, p. 179-199.

[274] **Yoshida T.**, *Social welfare rankings of income distributions A new parametric concept of intermediate inequality*, Social Choice and Welfare, (2005), Vol. 24, n°3, p. 557-574.

[275] **Zheng B.**, *An axiomatic characterization of the Watts poverty index* , Economics Letters, (1993), Vol. 42, p. 81-86.

[276] ———————— , *Unit Consistency and Inequality Orderings*, Working Paper, Department of Economics, University of Colorado at Denver and HSC, (2003), n°2005-1.

[277] ———————— , *On Intermediate Measures of Inequality*, in John A. Bishop and Yoram Amiel, Studies on Economic Well-Being : Essays in the Honor of John P. Formby (ed.),Research on Economic Inequality, Emerald Group Publishing Limited, (2004), Vol. 12, p. 135-157.

[278] ———————— , *Unit-Consistent Decomposable Inequality Measures : Some Extensions*, Working Paper, Department of Economics, University of Colorado at Denver and HSC, (2005), n°2005-2.

[279] ———————— , *Unit-Consistent Decomposable Inequality Measures*, Economica, (2007a), Vol. 74, p. 97-111.

[280] ———————— , *Inequality orderings and unit-consistency*,Social Choice and Welfare, (2007b), Vol. 29, p. 515-538.

[281] ———————— , *On intermediate measures of inequality*, Research on Economic Inequality, (2007c), Vol. 12, p. 135-157.

[282] **Zoli C.**, *Intersecting generalized Lorenz curves and the Gini index*, Social Choice and Welfare, (1999), vol.16, p. 183-196.

[283] ——————— , *Inverse stochastic dominance, inequality measurement and Gini index*, Journal of Economics, (2002), Vol. Supplément 9, p. 119-161.

[284] ——————— , *Characterizing Inequality Equivalence Criteria*, Working Paper Series, (2012), WP Number : 32.

Table des matières

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER
FACULTÉ DES SCIENCES ÉCONOMIQUES ARRÊTÉ DU 17 AOÛT 2006

Essais sur l'inégalité et la mobilité

RÉSUMÉ :
Cette thèse a pour objet de fournir une méthode d'évaluation simple de l'inégalité et de la mobilité des revenus. Nous utilisons une méthode de décomposition récemment introduite dans la littérature et aujourd'hui connue sous le nom de *décomposition faible*, pour analyser la répartition des écarts de revenus entre les individus appartenant à un même sous-groupe et ceux situés dans des sous-groupes distincts. Nous nous intéressons en particulier aux contextes dans lesquels il peut être pertinent de faire appel à un tel outil de décomposition. Nous approfondissons nos recherches en précisant les propriétés normatives des indicateurs compatibles avec le schéma de décomposition faible en sous-groupes. Nous énonçons notamment des principes de transferts intra- et intergroupes afin de fournir des moyens d'actions représentatifs des préférences d'un décideur politique. Les fondements axiomatiques de cette propriété de décomposition en sous-groupes sont également abordés. Des fonctions de pondération plus générale mais néanmoins conformes aux schémas de décomposition en sous-groupes usuels sont introduites. Cette généralisation nous permet de caractériser axiomatiquement des mesures d'inégalité à 2 paramètres que nous qualifions de $(\alpha, \delta)-$Gini. Ces 2 paramètres α et δ permettent de capter l'ensemble des points de vue politique des décideurs publics (d'extrême gauche à extrême droite). Nous montrons de plus que l'application de la décomposition faible en sous-groupes se généralise aisément à l'étude de la mobilité des revenus. Nous proposons ainsi une adaptation de la propriété de décomposition en sous-groupes dans un cadre bidimensionnel et caractérisons 2 classes de mesures d'inégalité de croissance ajustée et de mouvements de revenus cohérentes avec cette condition. Diverses études empiriques sont également menées afin d'illustrer les différentes notions développées dans cette thèse.

Essays on Inequality and Mobility

ABSTRACT :
This Ph.D. Dissertation aims at providing accurate and simple tool to evaluate income inequality and mobility. Our work relies on a subgroup decomposition property recently introduced in the literature as the "*weak decomposition*" to break down total disparities into within-group and between-group disparities. A particular interest is given to the context in which subgroup decomposition can be applied. We introduce within-group and between-group transfer principles that can be modulated according to a decision maker's preferences. The axiomatic basis of the subgroup decomposition property are also dealt with. Some general weighing functions are introduced to caracterize a two-parameters class of inequality measures denoted $(\alpha, \delta)-$Gini. The parameters α and δ allow capturing the set of decision's maker point of view (from extrem leftist to extreme rightist). Furthermore, we demonstrate the the application of the weak decomposition can easily be extended to income mobility. We propose an adaptation of the subgroup decomposition property to a bimensional framework and we characterize 2 classes of inequality adjusted growth and income movements measures consistent with such a property. Various empirical studies are also carried out to illustrate the various developed concepts.

DISCIPLINE : Sciences Économiques (Section n°5).

MOTS-CLÉS : Inégalités intragroupes, Inégalités intergroupes, Mouvements Interpersonnels de revenus, Décomposition en sous-groupes, Transferts intragroupes, Transferts intergroupes.

ADRESSE : LAMETA – Laboratoire Montpelliérain d'Économie Théorique et Appliquée
Université Montpellier – Faculté des Sciences Économiques
Avenue Raymond Dugrand – Site de Richter – C.S. 79606
34960 Montpellier Cedex 2